Proiezioni cartografiche: dall'opera fondamentale di Johann Heinrich Lambert alle moderne implementazioni geodetiche e computazionali

Parte Prima: Fondamenti teorici e contesto storico-matematico

Capitolo I: Il Problema fondamentale della rappresentazione cartografica

La rappresentazione della superficie terrestre su un supporto piano costituisce uno dei problemi matematici più profondi e affascinanti che hanno impegnato l'intelletto umano dall'antichità classica fino all'era contemporanea della geodesia spaziale. La questione si pone in termini rigorosamente geometrici come il tentativo di stabilire una corrispondenza biunivoca tra due varietà differenziabili di dimensione due dotate di metriche riemanniane fondamentalmente incompatibili: da un lato la superficie dello sferoide terrestre, approssimabile in prima istanza come una superficie a curvatura gaussiana positiva e sostanzialmente costante, dall'altro il piano euclideo bidimensionale caratterizzato da curvatura gaussiana identicamente nulla.

Il Theorema Egregium di Carl Friedrich Gauss, dimostrato nel 1827 e pubblicato nelle "Disquisitiones generales circa superficies curvas", stabilisce con rigore assoluto che la curvatura gaussiana di una superficie è una proprietà intrinseca della metrica indotta sulla superficie stessa, invariante rispetto a qualsiasi trasformazione isometrica locale. In termini più precisi, se consideriamo una superficie S immersa nello spazio euclideo tridimensionale e dotata della metrica indotta dall'immersione, e se $\psi: S \to S'$ è un'isometria locale (ovvero una mappa che preserva le lunghezze degli archi di curva), allora la curvatura gaussiana $K(p)$ in ogni punto p di S deve necessariamente essere uguale alla curvatura gaussiana $K(\psi(p))$ nel corrispondente punto immagine.

Applicando questo risultato basilare al nostro problema cartografico, consideriamo la sfera di raggio R come modello approssimato della Terra. La curvatura gaussiana di questa superficie è costante e positiva, precisamente $K_{sfera} = 1/R^2$. Il piano cartesiano, d'altra parte, possiede curvatura gaussiana identicamente nulla, $K_{piano} = 0$. Ne consegue immediatamente che non può esistere alcuna trasformazione isometrica globale dalla sfera al piano, poiché una tale trasformazione dovrebbe preservare la curvatura gaussiana, il che è manifestamente impossibile dati i valori $K_{sfera} \neq K_{piano}$. Questa impossibilità topologica fondamentale impone necessariamente l'introduzione di distorsioni nella rappresentazione cartografica. La natura di queste distorsioni può assumere forme diverse a seconda delle proprietà geometriche che si sceglie di preservare prioritariamente. Le tre proprietà geometriche fondamentali che una rappresentazione cartografica ideale

dovrebbe conservare sono l'equivalenza (preservazione delle aree), la conformità (preservazione degli angoli tra curve intersecantesi), e l'equidistanza (preservazione delle distanze lungo determinate direzioni privilegiate).
Il teorema fondamentale della cartografia matematica, la cui dimostrazione rigorosa può essere ricondotta ai principi della geometria differenziale, stabilisce che è impossibile preservare simultaneamente più di una di queste tre proprietà in una rappresentazione cartografica di una regione di estensione finita della superficie sferica. Questo teorema di impossibilità definisce quello che potremmo chiamare il "trilemma cartografico fondamentale": ogni proiezione deve necessariamente sacrificare almeno due delle tre proprietà desiderabili, e la scelta di quale proprietà preservare dipende dall'applicazione specifica per cui la carta è destinata.

Capitolo II: Johann Heinrich Lambert e la rivoluzione della cartografia matematica del Settecento

Johann Heinrich Lambert nacque nel 1728 a Mulhouse, all'epoca città libera dell'Impero, in una famiglia di modeste condizioni economiche. Nonostante la mancanza di un'educazione formale universitaria, Lambert sviluppò attraverso lo studio autodidattico una padronanza straordinaria della matematica, dell'astronomia, della fisica e della filosofia, diventando uno dei più brillanti scienziati del suo tempo. La sua opera abbraccia campi vastissimi del sapere settecentesco: dimostrò l'irrazionalità di π, contribuì alla fotometria (l'unità di luminanza lambert porta il suo nome), sviluppò teorie sulla struttura dell'universo che anticipavano concetti moderni, e formulò una delle prime versioni del principio di relatività del moto.
Nel contesto della cartografia matematica, l'opera fondamentale di Lambert è rappresentata dai "Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung" (Contributi all'uso della matematica e delle sue applicazioni), pubblicati in tre volumi tra il 1765 e il 1772. Il terzo volume, apparso nel 1772, contiene la sezione "Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten" (Note e aggiunte sulla costruzione delle carte terrestri e celesti), che rappresenta il primo trattamento sistematico e rigorosamente matematico delle proiezioni cartografiche nella storia della scienza.
L'approccio di Lambert si distingueva radicalmente da quello dei cartografi precedenti per il suo carattere essenzialmente analitico piuttosto che puramente geometrico-costruttivo. Mentre i cartografi rinascimentali e del primo periodo moderno derivavano le loro proiezioni principalmente attraverso costruzioni geometriche perspettive (proiezione del globo terrestre su superfici sviluppabili mediante raggi proiettanti emananti da un punto), Lambert affrontò il problema partendo dalla definizione esplicita delle

proprietà matematiche che la trasformazione doveva soddisfare, per poi derivare analiticamente le equazioni della proiezione come soluzione di opportune equazioni differenziali o condizioni funzionali.
Questa inversione metodologica, dal geometrico-sintetico all'analitico-deduttivo, rappresenta uno degli aspetti più moderni dell'approccio lambertiano e spiega perché le sue proiezioni abbiano mantenuto rilevanza fino all'epoca contemporanea. Lambert non si limitò a inventare nuove proiezioni, ma sviluppò una vera e propria teoria matematica delle trasformazioni cartografiche, classificandole sistematicamente in base alle loro proprietà invarianti e derivando le condizioni necessarie e sufficienti che le equazioni di trasformazione devono soddisfare per possedere determinate caratteristiche geometriche.
Nel suo trattato del 1772, Lambert presentò sette nuove proiezioni, ognuna progettata per ottimizzare specifiche proprietà geometriche. Tra queste, tre hanno avuto un'influenza particolarmente profonda e duratura sullo sviluppo della cartografia moderna: la proiezione conica conforme, la proiezione cilindrica conforme (che Lambert riconobbe essere equivalente alla proiezione già utilizzata dai navigatori e oggi nota come proiezione di Mercatore, fornendone però per la prima volta una derivazione matematica rigorosa), e la proiezione azimutale equivalente. Ciascuna di queste proiezioni rappresenta una soluzione ottimale a un particolare problema del trilemma cartografico.

Capitolo III: La geometria differenziale delle superfici e le condizioni di conformità

Per comprendere appieno la derivazione matematica delle proiezioni conformi di Lambert, è necessario sviluppare preliminarmente gli strumenti della geometria differenziale delle superfici nel linguaggio della teoria delle metriche riemanniane. Consideriamo una superficie S parametrizzata localmente da coordinate curvilinee (u, v). La metrica riemanniana su S è specificata dal tensore metrico, i cui componenti in coordinate locali sono:

$g_{ij} = \partial r/\partial u^i \cdot \partial r/\partial u^j$

dove r(u, v) è il vettore posizione di un punto sulla superficie e il punto $\cdot$ denota il prodotto scalare euclideo nello spazio ambiente tridimensionale. Esplicitamente, il tensore metrico ha la forma matriciale:

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

con $g_{12} = g_{21}$ per simmetria. La forma quadratica fondamentale, che esprime l'elemento di lunghezza al quadrato ds^2 su S, è:

$$ds^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2$$

Questa forma quadratica contiene tutta l'informazione intrinseca sulla geometria della superficie, indipendentemente dalla particolare parametrizzazione scelta. Per una superficie sferica di raggio R parametrizzata dalle coordinate geografiche (φ, λ) dove φ è la latitudine e λ è la longitudine, la metrica assume la forma:

$$ds^2 = R^2\,d\varphi^2 + R^2\cos^2(\varphi)\,d\lambda^2$$

da cui si ricava:

$$g_{11} = R^2$$
$$g_{12} = g_{21} = 0$$
$$g_{22} = R^2\cos^2(\varphi)$$

La diagonalità del tensore metrico in questo sistema di coordinate riflette l'ortogonalità tra meridiani e paralleli sulla sfera. Il determinante del tensore metrico è $g = \det(g_{ij}) = R^4\cos^2(\varphi)$, e questo determina l'elemento di area sulla sfera: $dA = \sqrt{g}\,d\varphi\,d\lambda = R^2\cos(\varphi)\,d\varphi\,d\lambda$.
Consideriamo ora una trasformazione cartografica che mappa la superficie sferica S su un dominio piano P. Possiamo rappresentare questa trasformazione attraverso funzioni $(x, y) = F(\varphi, \lambda)$, dove (x, y) sono coordinate cartesiane nel piano della carta. La trasformazione induce una metrica pullback sul piano, le cui componenti sono calcolate mediante:

$$G_{11} = (\partial x/\partial\varphi)^2 + (\partial y/\partial\varphi)^2$$
$$G_{12} = G_{21} = (\partial x/\partial\varphi)(\partial x/\partial\lambda) + (\partial y/\partial\varphi)(\partial y/\partial\lambda)$$
$$G_{22} = (\partial x/\partial\lambda)^2 + (\partial y/\partial\lambda)^2$$

Una trasformazione è conforme se e solo se preserva localmente gli angoli tra curve qualsiasi che si intersecano. In termini del tensore metrico, questa condizione è equivalente alla richiesta che il tensore metrico pullback G_{ij} sia proporzionale al tensore metrico originale g_{ij} attraverso un fattore di scala o scalare $k^2(\varphi, \lambda)$ che può variare da punto a punto ma è isotropo in ogni punto:

$$G_{ij} = k^2(\varphi, \lambda)\,g_{ij}$$

Esplicitamente, questa condizione di conformità si traduce in tre equazioni

accoppiate:

$(\partial x/\partial \varphi)^2 + (\partial y/\partial \varphi)^2 = k^2 R^2$
$(\partial x/\partial \lambda)^2 + (\partial y/\partial \lambda)^2 = k^2 R^2 \cos^2(\varphi)$
$(\partial x/\partial \varphi)(\partial x/\partial \lambda) + (\partial y/\partial \varphi)(\partial y/\partial \lambda) = 0$

La terza equazione esprime l'ortogonalità tra le curve coordinate immagine, corrispondente all'annullarsi della componente fuori diagonale del tensore metrico pullback. Questa condizione implica che le curve φ = costante e λ = costante sulla sfera vengano mappate in curve che si intersecano ortogonalmente anche sul piano cartografico.

Alternativamente, la condizione di conformità può essere espressa elegantemente utilizzando la teoria delle funzioni complesse. Introduciamo una coordinata complessa sulla sfera $\zeta = \varphi + i \lambda$ e una coordinata complessa sul piano $w = x + i y$. Una trasformazione $w = w(\zeta)$ è conforme se e solo se $w(\zeta)$ è una funzione olomorfa (analitica complessa) di ζ, ovvero soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann:

$\partial x/\partial \varphi = \partial y/\partial \lambda$
$\partial x/\partial \lambda = -\partial y/\partial \varphi$

Queste due equazioni, combinate con la condizione di ortogonalità precedente, sono equivalenti alle tre condizioni di conformità. La formulazione in termini di funzioni complesse ha il vantaggio di connettere la teoria delle proiezioni conformi con la ricchissima struttura della teoria delle funzioni analitiche, permettendo l'uso di potenti tecniche dell'analisi complessa.

Capitolo IV: La latitudine isometrica e la trasformazione conforme sfera-piano

Il problema di costruire una proiezione conforme può essere riformulato come il problema di trovare una parametrizzazione delle coordinate sulla sfera tale che la metrica assuma una forma isotroica, ovvero tale che il tensore metrico sia proporzionale alla matrice identità. Se riusciamo a trovare coordinate (q, λ) sulla sfera tali che:

$ds^2 = m^2(q, \lambda) (dq^2 + d\lambda^2)$

per qualche funzione fattore conforme $m(q, \lambda)$, allora una proiezione sul piano con coordinate cartesiane $x = f(q) \cos(n \lambda)$, $y = f(q) \sin(n \lambda)$, dove f è una

funzione arbitraria e n è una costante, preserverà automaticamente la conformità.
Lambert comprese che la chiave per costruire proiezioni conformi consisteva nell'introdurre una nuova coordinata latitudinale q, oggi chiamata latitudine isometrica, definita in modo tale che la metrica sferica assuma la forma isotropica desiderata. Partendo dalla metrica sferica standard:

$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2(\varphi) d\lambda^2$

vogliamo trovare una trasformazione $q = q(\varphi)$ tale che:

$ds^2 = m^2(q, \lambda) (dq^2 + d\lambda^2)$

Sostituendo $d\varphi = (d\varphi/dq) dq$ nella metrica originale e richiedendo che i coefficienti di dq^2 e $d\lambda^2$ siano proporzionali, otteniamo la condizione:

$R^2 (d\varphi/dq)^2 = R^2 \cos^2(\varphi)$

da cui:

$d\varphi/dq = \cos(\varphi)$

Questa è un'equazione differenziale di primo ordine separabile per $q(\varphi)$. Integrandola si ottiene:

$q(\varphi) = \int_{[0 \text{ to } \varphi]} d\varphi'/\cos(\varphi') = \int_{[0 \text{ to } \varphi]} \sec(\varphi') d\varphi'$

L'integrale di $\sec(\varphi)$ è un integrale standard che può essere valutato con diverse tecniche. Un metodo consiste nel moltiplicare numeratore e denominatore per $\sec(\varphi) + \tan(\varphi)$:

$\int \sec(\varphi) d\varphi = \int \sec(\varphi)[\sec(\varphi) + \tan(\varphi)]/[\sec(\varphi) + \tan(\varphi)] d\varphi$

Ponendo $u = \sec(\varphi) + \tan(\varphi)$, si ha $du = [\sec(\varphi)\tan(\varphi) + \sec^2(\varphi)] d\varphi = \sec(\varphi)[\tan(\varphi) + \sec(\varphi)] d\varphi$, quindi:

$\int \sec(\varphi) d\varphi = \int du/u = \ln|u| + C = \ln|\sec(\varphi) + \tan(\varphi)| + C$

Alternativamente, usando l'identità $\tan(\varphi) + \sec(\varphi) = \tan(\pi/4 + \varphi/2) / \tan(\pi/4 - \varphi/2) \cdot [\cos(\pi/4 - \varphi/2)/\cos(\pi/4 + \varphi/2)]$, e dopo semplificazioni trigonometriche, si può scrivere:

$$q(\varphi) = \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$$

Questa è l'espressione classica della latitudine isometrica per una sfera. Il nome "isometrica" deriva dal fatto che nelle coordinate (q, λ), le lossodromie (curve che intersecano tutti i meridiani con angolo costante α) sono rappresentate da rette con pendenza tan(α). In altri termini, la trasformazione (φ, λ) → (q, λ) rende le lossodromie isometriche alle loro rappresentazioni cartesiane.
Per verificare questa proprietà, consideriamo una lossodromia caratterizzata dalla condizione $d\lambda/ds = \cos(\alpha)/[R\cos(\varphi)]$ e $d\varphi/ds = \sin(\alpha)/R$, dove s è l'ascissa curvilinea lungo la lossodromia e α è l'angolo costante rispetto ai meridiani. Dividendo membro a membro:

$$d\lambda/d\varphi = \cos(\alpha)/[\sin(\alpha)\cos(\varphi)]$$

Nelle coordinate isometriche, usando $d\varphi = \cos(\varphi)\, dq$:

$$d\lambda/dq = d\lambda/d\varphi \cdot d\varphi/dq = [\cos(\alpha)/\sin(\alpha)\cos(\varphi)] \cdot \cos(\varphi) = \cos(\alpha)/\sin(\alpha) = \cot(\alpha)$$

Questa è l'equazione di una retta nel piano (q, λ) con coefficiente angolare costante cot(α), confermando che le lossodromie divengono segmenti rettilinei nella rappresentazione isometrica.
La latitudine isometrica tende a -∞ quando $\varphi \to -\pi/2$ (polo sud) e a +∞ quando $\varphi \to +\pi/2$ (polo nord), riflettendo il fatto che i poli sono mappati a infinito nella rappresentazione isometrica. Questo comportamento asintotico è una conseguenza inevitabile della conformità: qualsiasi proiezione conforme della sfera completa sul piano deve necessariamente mappare almeno un punto della sfera all'infinito nel piano.

Capitolo V: Estensione della latitudine isometrica allo sferoide ellissoidale

La Terra reale non è perfettamente sferica ma è meglio approssimata da uno sferoide oblato, ovvero un ellissoide di rotazione generato dalla rotazione di un'ellisse attorno al suo asse minore. Le misurazioni geodetiche moderne, basate su osservazioni satellitari, gravimetriche e altimetriche, hanno permesso di determinare con grande precisione i parametri di questo ellissoide di riferimento.
Un ellissoide di rotazione è caratterizzato da due parametri: il semiasse equatoriale a (raggio equatoriale) e il semiasse polare b (distanza dal centro ai poli). In alternativa, si può usare il semiasse equatoriale a insieme allo schiacciamento f, definito come:

$f = (a - b)/a$

Un'altra quantità fondamentale è l'eccentricità prima e della sezione meridiana (sezione dell'ellissoide attraverso l'asse di rotazione), definita da:

$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 2f - f^2$

Per l'ellissoide di riferimento WGS84 (World Geodetic System 1984), attualmente il più utilizzato nei sistemi di posizionamento satellitare e nella cartografia digitale globale, i parametri sono:

a = 6.378.137,0 m
f = 1/298,257223563

da cui si ricava:

b = a(1 - f) = 6.356.752,314245 m
e^2 = 0,00669437999014132

Lo schiacciamento dell'ellissoide terrestre è piccolo (circa 1/298), ma le sue conseguenze sulle misurazioni geodetiche e sulle formule cartografiche sono tutt'altro che trascurabili. Per distanze di migliaia di chilometri, la differenza tra calcoli basati sulla sfera e calcoli basati sull'ellissoide può ammontare a diverse centinaia di metri, il che è inaccettabile per applicazioni geodetiche di precisione o per sistemi di navigazione moderni.
La metrica sulla superficie di un ellissoide di rotazione, parametrizzato dalle coordinate geografiche (φ, λ) dove φ è la latitudine geodetica (angolo tra la normale alla superficie e il piano equatoriale) e λ è la longitudine, ha la forma:

$ds^2 = M^2(\varphi)\, d\varphi^2 + N^2(\varphi) \cos^2(\varphi)\, d\lambda^2$

dove M(φ) è il raggio di curvatura della sezione meridiana e N(φ) è il raggio di curvatura della sezione normale perpendicolare al meridiano (parallelo), dati da:

$M(\varphi) = a(1 - e^2)/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(3/2)}$

$N(\varphi) = a/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(1/2)}$

La non costanza di questi raggi di curvatura in funzione della latitudine riflette la geometria variabile dell'ellissoide, che possiede curvatura gaussiana non uniforme, massima all'equatore e minima ai poli.

Per derivare la latitudine isometrica per l'ellissoide, procediamo analogamente al caso sferico, richiedendo che la metrica assuma forma isotroica nelle coordinate (q, λ). La condizione diventa:

$$M^2(\varphi) \, (d\varphi/dq)^2 = N^2(\varphi) \cos^2(\varphi)$$

da cui:

$$d\varphi/dq = [N(\varphi)/M(\varphi)] \cos(\varphi) = [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(1/2)} [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(3/2)}/[(1 - e^2) \cos(\varphi)]$$
$$= [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]/[(1 - e^2)^{(1/2)} \cos(\varphi)]$$

Che può essere riscritto come:

$$dq/d\varphi = [(1 - e^2)^{(1/2)} \cos(\varphi)]/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]$$

Utilizzando l'identità $1 - e^2 \sin^2(\varphi) = 1 - e^2(1 - \cos^2(\varphi)) = (1 - e^2) + e^2 \cos^2(\varphi)$, possiamo riscrivere:

$$dq/d\varphi = [(1 - e^2)^{(1/2)} \cos(\varphi)]/[(1 - e^2) + e^2 \cos^2(\varphi)]$$

Questo integrale non è elementare nella forma generale, ma può essere valutato utilizzando tecniche di integrazione avanzate. Un approccio consiste nel separare il fattore ellissoidale utilizzando la decomposizione:

$$1/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)] = 1 + e^2 \sin^2(\varphi)/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]$$

e quindi:

$$dq/d\varphi = \cos(\varphi)/[(1 - e^2)^{(1/2)} [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]]$$
$$= [1/(1 - e^2)^{(1/2)}] [\cos(\varphi) + e^2 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi)/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]]$$

Il primo termine dà l'integrale di $\sec(\varphi)$ moltiplicato per $(1 - e^2)^{(-1/2)}$. Il secondo termine richiede la sostituzione $u = \sin(\varphi)$, $du = \cos(\varphi) \, d\varphi$:

$$\int [e^2 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi)]/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)] \, d\varphi = e^2 \int u^2 \, du/[1 - e^2 u^2]$$

Questo integrale può essere valutato per decomposizione in frazioni parziali o mediante sostituzione iperbolica. Dopo calcoli elaborati, il risultato finale per la latitudine isometrica ellissoidale è:

$$q(\varphi) = \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)] - (e/2) \ln[(1 + e \sin(\varphi))/(1 - e \sin(\varphi))]$$

Questa espressione può essere riscritta in varie forme equivalenti. Usando le proprietà dei logaritmi:

$$q(\varphi) = \ln\{\tan(\pi/4 + \varphi/2) \cdot [(1 - e \sin(\varphi))/(1 + e \sin(\varphi))]^{(e/2)}\}$$

Alternativamente, utilizzando la funzione arco tangente iperbolica $\operatorname{atanh}(x) = (1/2) \ln[(1 + x)/(1 - x)]$, possiamo scrivere:

$$\ln[(1 + e \sin(\varphi))/(1 - e \sin(\varphi))] = 2 \operatorname{atanh}[e \sin(\varphi)]$$

e quindi:

$$q(\varphi) = \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)] - e \cdot \operatorname{atanh}[e \sin(\varphi)]$$

Oppure, notando che $\ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)] = \operatorname{atanh}[\sin(\varphi)]$:

$$q(\varphi) = \operatorname{atanh}[\sin(\varphi)] - e \cdot \operatorname{atanh}[e \sin(\varphi)]$$

Quest'ultima forma è particolarmente conveniente per implementazioni numeriche, poiché la funzione atanh è disponibile nelle librerie matematiche standard e presenta buone proprietà di stabilità numerica.
Nel limite $e \to 0$ (sfera), il secondo termine svanisce e si recupera la formula sferica $q(\varphi) = \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$. Per l'ellissoide WGS84 con $e^2 \approx 0{,}00669$, il termine correttivo ellissoidale è piccolo ma non trascurabile: per $\varphi = 45°$, esso vale circa $e \cdot \operatorname{atanh}[e/\sqrt{2}] \approx 0{,}0034$ radianti, corrispondente a circa 350 metri sulla superficie terrestre, una differenza significativa per applicazioni geodetiche di precisione.

Parte Seconda: Le proiezioni coniche conformi di Lambert

Capitolo VI: Derivazione analitica della proiezione conica conforme generale

La proiezione conica conforme di Lambert si basa sull'idea geometrica di avvolgere un cono attorno allo sferoide terrestre, proiettare la superficie dello sferoide sulla superficie del cono mantenendo la conformità, e quindi sviluppare il cono sul piano. Tuttavia, come sottolineato, l'approccio di Lambert non era puramente geometrico-costruttivo ma analitico: egli derivò le equazioni della proiezione imponendo direttamente le condizioni matematiche di conformità e di tangenza o secanza del cono lungo paralleli specificati.
Consideriamo un cono circolare retto con vertice in un punto V e asse coincidente con l'asse polare della Terra. Il cono interseca la superficie

terrestre lungo un parallelo di latitudine φ_0 (caso tangente) oppure lungo due paralleli φ_1 e φ_2 (caso secante con $\varphi_1 < \varphi_2$). Quando il cono viene sviluppato su un piano, la circonferenza di intersezione con un parallelo di latitudine φ sulla Terra, che ha lunghezza 2π a $\cos(\varphi)$ (per la sfera) o $2\pi N(\varphi) \cos(\varphi)$ (per l'ellissoide), viene mappata in un arco di cerchio sul piano con raggio $\rho(\varphi)$ e apertura angolare $2\pi n$, dove n è una costante chiamata "costante del cono" che determina l'angolo al vertice del cono.
La condizione di preservazione della lunghezza lungo il parallelo standard (dove il cono tocca o interseca la superficie terrestre) impone:

$$2\pi N(\varphi_{std}) \cos(\varphi_{std}) = 2\pi n \rho(\varphi_{std})$$

da cui:

$$\rho(\varphi_{std}) = N(\varphi_{std}) \cos(\varphi_{std}) / n$$

Per la conformità, il fattore di scala deve essere isotropo, quindi il fattore di scala lungo il parallelo deve essere uguale al fattore di scala lungo il meridiano. Il fattore di scala lungo il parallelo è:

$$k_\lambda(\varphi) = [n \rho(\varphi)]/[N(\varphi) \cos(\varphi)]$$

Il fattore di scala lungo il meridiano richiede il calcolo della derivata di ρ rispetto alla coordinata latitudinale. Per imporre la conformità, dobbiamo avere $k_\lambda = k_\varphi$, ovvero:

$$|d\rho/d\varphi| = [n \rho(\varphi)]/[N(\varphi) \cos(\varphi)] \cdot M(\varphi)$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine per $\rho(\varphi)$. Usando la latitudine isometrica $q(\varphi)$, possiamo riscrivere $d\varphi$ in termini di dq:

$$d\rho/dq = (d\rho/d\varphi)(d\varphi/dq) = [n \rho(\varphi) M(\varphi)]/[N(\varphi) \cos(\varphi)] \cdot [N(\varphi) \cos(\varphi)]/[M(\varphi) (1 - e^2)^{1/2}]$$
$$= [n \rho(\varphi)]/(1 - e^2)^{1/2}$$

L'equazione separabile si integra immediatamente:

$$d\rho/\rho = [n/(1 - e^2)^{1/2}] dq$$

$$\ln(\rho) = [n/(1 - e^2)^{1/2}] q + C$$

$$\rho(\varphi) = A \exp\{[n/(1 - e^2)^{1/2}] q(\varphi)\}$$

dove A è una costante di integrazione da determinare dalle condizioni al contorno. Per semplicità notazionale, definiamo:

$q_e(\varphi) = q(\varphi)/(1 - e^2)^{(1/2)}$

Questa quantità è talvolta chiamata "latitudine isometrica ridotta". Allora:

$\rho(\varphi) = A \exp[n\, q_e(\varphi)]$

Per una proiezione con un singolo parallelo standard φ_0, la condizione al contorno $\rho(\varphi_0) = N(\varphi_0) \cos(\varphi_0)/n$ determina:

$A = [N(\varphi_0) \cos(\varphi_0)/n] \exp[-n\, q_e(\varphi_0)]$

Per una proiezione con due paralleli standard φ_1 e φ_2, la condizione che il fattore di scala sia unitario su entrambi i paralleli impone due condizioni:

$\rho(\varphi_1) = N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)/n$
$\rho(\varphi_2) = N(\varphi_2) \cos(\varphi_2)/n$

Sostituendo l'espressione di $\rho(\varphi)$ in queste due equazioni:

$A \exp[n\, q_e(\varphi_1)] = N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)/n$
$A \exp[n\, q_e(\varphi_2)] = N(\varphi_2) \cos(\varphi_2)/n$

Dividendo la prima per la seconda:

$\exp\{n\, [q_e(\varphi_1) - q_e(\varphi_2)]\} = [N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)]/[N(\varphi_2) \cos(\varphi_2)]$

Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i membri:

$n\, [q_e(\varphi_1) - q_e(\varphi_2)] = \ln[N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)] - \ln[N(\varphi_2) \cos(\varphi_2)]$

da cui si ricava la costante del cono:

$n = \ln[N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)] - \ln[N(\varphi_2) \cos(\varphi_2)] / [q_e(\varphi_1) - q_e(\varphi_2)]$

Questa può essere riscritta in forma più compatta come:

$n = \ln\{[N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)]/[N(\varphi_2) \cos(\varphi_2)]\} / [q_e(\varphi_1) - q_e(\varphi_2)]$

Per l'approssimazione sferica, dove $N(\varphi) = a$ e $q_e(\varphi) = q(\varphi) = \ln[\tan(\pi/4 +$

φ/2)], questa formula si semplifica in:

$$n = \ln[\cos(\varphi_1)/\cos(\varphi_2)] / \{\ln[\tan(\pi/4 + \varphi_1/2)] - \ln[\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)]\}$$

che può essere ulteriormente semplificata come:

$$n = \ln[\cos(\varphi_1)/\cos(\varphi_2)] / \ln\{[\tan(\pi/4 + \varphi_1/2)]/[\tan(\pi/4 + \varphi_2/2)]\}$$

Una volta determinata la costante del cono n, la costante A si calcola da una qualsiasi delle due condizioni al contorno, ad esempio:

$$A = [N(\varphi_1) \cos(\varphi_1)/n] \exp[-n\, q_e(\varphi_1)]$$

Le coordinate cartesiane (x, y) di un punto sulla carta, corrispondente al punto di coordinate geografiche (φ, λ) sulla Terra, sono espresse in forma polare rispetto al vertice del cono sviluppato:

$$x = \rho(\varphi) \sin[n(\lambda - \lambda_0)]$$
$$y = \rho_0 - \rho(\varphi) \cos[n(\lambda - \lambda_0)]$$

dove λ_0 è il meridiano centrale della proiezione (meridiano di simmetria, generalmente scelto al centro della regione da cartografare) e ρ_0 è una costante che definisce l'origine del sistema di coordinate cartesiane. Tipicamente si sceglie $\rho_0 = \rho(\varphi_ref)$ dove φ_ref è una latitudine di riferimento conveniente, spesso uno dei paralleli standard o la latitudine centrale della regione cartografata.
Il fatto che le longitudini compaiano moltiplicate per n nelle funzioni trigonometriche riflette la geometria del cono: quando si percorre l'intero meridiano sulla Terra ($\Delta\lambda = 2\pi$), sul piano della carta si percorre un arco di apertura angolare $2\pi n < 2\pi$. I meridiani sulla carta sono rappresentati da semirette che emanano dal vertice del cono (centro della proiezione) e convergono verso il polo con angolo ridotto rispetto alla convergenza reale dei meridiani terrestri.

Capitolo VII: Proprietà gometriche e analisi delle distorsioni

Il fattore di scala locale k(φ, λ), che misura il rapporto tra una distanza infinitesimale sulla carta e la corrispondente distanza sulla superficie terrestre, è fondamentale per quantificare le distorsioni introdotte dalla proiezione. Per la proiezione conica conforme, la conformità garantisce che il fattore di scala sia isotropo, ovvero indipendente dalla direzione considerata: k(φ, λ) = k(φ), dipendente solo dalla latitudine.

Il calcolo esplicito di k(φ) parte dalla definizione del fattore di scala lungo il parallelo:

k(φ) = [lunghezza elemento arco sulla carta]/[lunghezza elemento arco sulla Terra]

Per un elemento infinitesimale dλ lungo il parallelo di latitudine φ:

lunghezza sulla Terra = N(φ) cos(φ) dλ
lunghezza sulla carta = ρ(φ) · n dλ

quindi:

k(φ) = [ρ(φ) n]/[N(φ) cos(φ)]

Sostituendo l'espressione di ρ(φ) = A exp[n q_e(φ)]:

k(φ) = [A n exp[n q_e(φ)]]/[N(φ) cos(φ)]

Utilizzando la relazione per A derivata dalla condizione sul parallelo standard φ_1:

A = [N(φ_1) cos(φ_1)/n] exp[-n q_e(φ_1)]

otteniamo:

k(φ) = {[N(φ_1) cos(φ_1)/n] exp[-n q_e(φ_1)] · n exp[n q_e(φ)]}/[N(φ) cos(φ)]
= [N(φ_1) cos(φ_1)]/[N(φ) cos(φ)] · exp{n [q_e(φ) - q_e(φ_1)]}

Questa espressione mostra chiaramente che k(φ_1) = 1, confermando che il parallelo standard ha scala vera. Per φ diverso da φ_1, il fattore di scala si discosta dall'unità secondo una legge esponenziale nella differenza delle latitudini isometriche.
Per la proiezione con due paralleli standard φ_1 e φ_2, per costruzione abbiamo k(φ_1) = k(φ_2) = 1. Il fattore di scala in funzione della latitudine ha la forma generale:

k(φ) = [ρ(φ) n]/[N(φ) cos(φ)] = [A n exp[n q_e(φ)]]/[N(φ) cos(φ)]

Il comportamento di k(φ) può essere analizzato studiando la derivata rispetto a φ. Usando la regola della catena:

$dk/d\varphi = k(\varphi) \cdot d[\ln k(\varphi)]/d\varphi$

Calcolando il logaritmo:

$\ln k(\varphi) = \ln A + \ln n + n\, q_e(\varphi) - \ln[N(\varphi)] - \ln[\cos(\varphi)]$

Derivando rispetto a φ:

$d[\ln k]/d\varphi = n \cdot dq_e/d\varphi - d[\ln N]/d\varphi + \tan(\varphi)$

Ricordando che $dq_e/d\varphi = [1/(1-e^2)^{(1/2)}] \cdot dq/d\varphi$ e che per definizione di q abbiamo $dq/d\varphi \cdot M(\varphi) = N(\varphi) \cos(\varphi)$, possiamo scrivere:

$dq_e/d\varphi = [N(\varphi) \cos(\varphi)]/[M(\varphi) (1-e^2)^{(1/2)}]$

Inoltre, la derivata di $\ln N(\varphi)$ rispetto a φ è:

$d[\ln N]/d\varphi = (1/N) \cdot dN/d\varphi$

con:

$dN/d\varphi = a \cdot d/d\varphi\{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(-1/2)}\}$
$= a \cdot (-1/2)[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(-3/2)} \cdot (-2e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi))$
$= [a e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)]/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(3/2)}$
$= [e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)]/N^3(\varphi) \cdot a^3$
$= e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) N(\varphi)/a$

Quindi:

$d[\ln N]/d\varphi = [e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)]/a$

Sostituendo tutto nella derivata di ln k:

$d[\ln k]/d\varphi = n \cdot [N(\varphi) \cos(\varphi)]/[M(\varphi) (1-e^2)^{(1/2)}] - [e^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)]/a + \tan(\varphi)$

Questa espressione può essere ulteriormente semplificata usando le relazioni tra M, N e i parametri ellissoidali. L'analisi del segno di questa derivata permette di determinare dove il fattore di scala è crescente o decrescente in funzione della latitudine.
Per la proiezione a due paralleli standard, sappiamo che $k(\varphi_1) = k(\varphi_2) = 1$ con $\varphi_1 < \varphi_2$. Per continuità, deve esistere almeno un valore φ_min compreso tra φ_1 e φ_2 dove k raggiunge un minimo locale. In effetti, l'analisi mostra che $k(\varphi) < 1$ per $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ (la carta è compressa tra i paralleli standard), mentre k(φ)

> 1 per $\varphi < \varphi_1$ o $\varphi > \varphi_2$ (la carta è espansa esternamente ai paralleli standard).
Il valore minimo del fattore di scala si trova approssimativamente alla latitudine media tra i due paralleli standard. Per minimizzare le distorsioni massime nella regione di interesse, conviene scegliere φ_1 e φ_2 in modo tale che i valori massimi di k esternamente ai paralleli standard (ai bordi nord e sud della regione) siano approssimativamente uguali al reciproco del valore minimo di k internamente. Questa condizione di bilanciamento delle distorsioni porta a una scelta ottimale dei paralleli standard.
Per una regione che si estende dalle latitudini φ_sud a φ_nord, una regola pratica spesso utilizzata è quella di Tissot, che suggerisce di posizionare i paralleli standard a:

$\varphi_1 = \varphi_sud + (1/6)(\varphi_nord - \varphi_sud)$
$\varphi_2 = \varphi_nord - (1/6)(\varphi_nord - \varphi_sud)$

ovvero ai punti situati a un sesto della distanza dai bordi. Questa scelta minimizza approssimativamente l'errore quadratico medio del fattore di scala sulla regione.

Capitolo VIII: L'Indicatrice di Tissot e la Rappresentazione Grafica delle Distorsioni

Nicolas Auguste Tissot (1824-1897) sviluppò una teoria sistematica delle distorsioni cartografiche basata sull'analisi di come figure geometriche infinitesimali vengono trasformate dalla proiezione. Il suo contributo fondamentale, pubblicato in una serie di memorie tra il 1859 e il 1881, consiste nell'introduzione di quella che oggi è chiamata "indicatrice di Tissot" o "ellisse delle distorsioni".
L'idea di base è la seguente: consideriamo un cerchio infinitesimale di raggio ε sulla superficie terrestre, centrato in un punto P di coordinate (φ, λ). Questo cerchio rappresenta l'insieme di tutti i punti a distanza geodetica ε dal punto P. La proiezione cartografica trasforma questo cerchio in una figura sul piano della carta. Per una proiezione generica, questa figura è un'ellisse (o, in casi degeneri, un segmento o un punto).
Le proprietà dell'ellisse di Tissot contengono tutta l'informazione locale sulle distorsioni introdotte dalla proiezione nel punto P. I semiassi maggiore e minore dell'ellisse, che denotiamo con a_T e b_T, rappresentano rispettivamente il massimo e il minimo fattore di scala locale, ovvero i valori estremi del rapporto tra distanze sulla carta e distanze sulla Terra per segmenti infinitesimali emananti da P in tutte le possibili direzioni.

Per una proiezione conforme, l'ellisse di Tissot degenera sempre in un cerchio, poiché per definizione di conformità il fattore di scala è isotropo: $a_T = b_T = k(\varphi, \lambda)$. Questo riflette il fatto che le proiezioni conformi preservano localmente le forme, trasformando figure circolari infinitesimali in figure ancora circolari (sebbene di raggio diverso).
Per la proiezione conica conforme di Lambert, abbiamo dimostrato che $k(\varphi, \lambda) = k(\varphi)$, indipendente dalla longitudine. Quindi l'indicatrice di Tissot in ogni punto è un cerchio di raggio proporzionale a $k(\varphi)$, che varia solo con la latitudine. Lungo un parallelo, tutte le indicatrici hanno lo stesso raggio. Sui paralleli standard, le indicatrici hanno raggio unitario (in scala), indicando assenza di distorsione. Tra i paralleli standard, i cerchi sono più piccoli dell'unità, indicando compressione. Esternamente, sono più grandi, indicando espansione.
La visualizzazione grafica della distribuzione delle indicatrici di Tissot su una carta fornisce un'immediata comprensione intuitiva del pattern di distorsioni. Per la conica conforme con due paralleli standard, si osserva una distribuzione simmetrica rispetto alla linea centrale della regione cartografata, con distorsioni che crescono allontanandosi dai paralleli standard in entrambe le direzioni nord e sud.
Oltre al fattore di scala isotropo, altre quantità utili per caratterizzare le distorsioni sono:

1. La distorsione areale, definita come il rapporto tra l'area di una figura infinitesimale sulla carta e l'area della corrispondente figura sulla Terra. Per proiezioni conformi, essendo l'indicatrice un cerchio di raggio k, la distorsione areale è:

$$s = k^2(\varphi)$$

Nei paralleli standard $s = 1$ (aree vere), tra i paralleli $s < 1$ (aree ridotte), esternamente $s > 1$ (aree ingrandite).

2. La distorsione angolare massima ω, definita come il massimo scostamento tra un angolo sulla Terra e il corrispondente angolo sulla carta. Per proiezioni perfettamente conformi, per definizione $\omega = 0$ ovunque. Tuttavia, in implementazioni numeriche approssimate o in analisi di sensibilità agli errori, è utile quantificare piccole deviazioni dalla conformità perfetta.

3. Il modulo di deformazione di Airy-Kavrayskiy Δ, definito come una media pesata delle distorsioni lineari in tutte le direzioni:

$$\Delta = (1/2\pi) \int_{0}^{2\pi} [k(\alpha) - 1]^2 \, d\alpha$$

dove k(α) è il fattore di scala nella direzione di azimut α. Per proiezioni conformi k(α) = k costante, quindi:

$$\Delta = [k - 1]^2$$

Questo quantifica lo scostamento quadratico medio del fattore di scala dall'unità.

Capitolo IX: Casi Particolari e Degenerazioni: Dalla Conica alla Cilindrica e alla Polare

La famiglia delle proiezioni coniche conformi di Lambert include come casi limite speciali altre importanti proiezioni conformi. Questa unità concettuale, già intuita da Lambert, fu esplicitata rigorosamente dai matematici del diciannovesimo secolo e costituisce uno degli aspetti più eleganti della teoria delle proiezioni.

Caso 1: Proiezione cilindrica conforme (Mercatore)

Quando la costante del cono n tende a zero mentre simultaneamente i paralleli standard convergono verso l'equatore, la proiezione conica degenera in una proiezione cilindrica. Geometricamente, il cono si apre fino a diventare un cilindro tangente all'equatore.

Per analizzare questo limite, consideriamo una proiezione conica con paralleli standard φ_1 e φ_2 simmetrici rispetto all'equatore: $\varphi_2 = -\varphi_1 = \varepsilon$ piccolo. La costante del cono è:

$$\begin{aligned} n &= \ln[\cos(\varepsilon)/\cos(-\varepsilon)] \,/\, [q_e(\varepsilon) - q_e(-\varepsilon)] \\ &= \ln[1] \,/\, [q_e(\varepsilon) - q_e(-\varepsilon)] \\ &= 0 \,/\, [2\, q_e(\varepsilon)] \end{aligned}$$

Questo dà una forma indeterminata 0/0. Usando l'approssimazione per piccoli ε:

$$\cos(\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon^2/2$$
$$q_e(\varepsilon) \approx \varepsilon + (\varepsilon^3/3) + \ldots$$

si può dimostrare che $n \to 0$ come $\varepsilon \to 0$, ma il prodotto $n \cdot q_e(\varphi)$ rimane finito e tende a φ nel limite.

Le coordinate cartesiane nel limite cilindrico diventano:

$$x = \lim[n \to 0]\ \rho(\varphi)\ \sin[n(\lambda - \lambda_0)]$$
$$= \lim[n \to 0]\ A\ \exp[n\ q_e(\varphi)] \cdot [n(\lambda - \lambda_0)]$$
$$= A\ (\lambda - \lambda_0)$$

$$y = \lim[n \to 0]\ [\rho_0 - \rho(\varphi)\ \cos[n(\lambda - \lambda_0)]]$$
$$= \lim[n \to 0]\ [A\ \exp[n\ q_e(\varphi_0)] - A\ \exp[n\ q_e(\varphi)]]$$

Usando $\exp[n\ q_e(\varphi)] \approx 1 + n\ q_e(\varphi)$ per n piccolo:

$$y \approx A\ [n\ q_e(\varphi_0) - n\ q_e(\varphi)]$$
$$= A\ n\ [q_e(\varphi_0) - q_e(\varphi)]$$

Scegliendo l'origine in modo che $\varphi_0 = 0$ (equatore) e determinando la costante A dalla condizione di scala unitaria all'equatore, si ottiene $A = a/(1-e^2)^{(1/2)}$ e quindi:

$$x = a/(1-e^2)^{(1/2)} \cdot (\lambda - \lambda_0)$$
$$y = -a/(1-e^2)^{(1/2)} \cdot q_e(\varphi)$$

Per uno sferoide, con $q_e(\varphi) = q(\varphi)/(1-e^2)^{(1/2)}$, questo diventa:

$$x = a/(1-e^2)^{(1/2)} \cdot (\lambda - \lambda_0)$$
$$y = -a \cdot q(\varphi)$$

O, con la convenzione usuale di origine all'equatore e orientazione positiva verso nord:

$$x = a \cdot (\lambda - \lambda_0)$$
$$y = a \cdot q(\varphi)$$

Questa è precisamente la proiezione cilindrica conforme di Mercatore per uno sferoide. Per una sfera (e = 0):

$$x = R \cdot (\lambda - \lambda_0)$$
$$y = R \cdot \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$$

Caso 2: Proiezione Stereografica Polare

All'estremo opposto, quando il parallelo standard tende al polo ($\varphi_0 \to \pi/2$), la costante del cono tende all'unità: $n \to 1$. In questo limite, la proiezione conica

degenera nella proiezione stereografica polare.

Per $\varphi_0 \to \pi/2$:

$n = \sin(\varphi_0) \to \sin(\pi/2) = 1$

Le coordinate diventano:

$x = \rho(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_0)$
$y = \rho_0 - \rho(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_0)$

con:

$\rho(\varphi) = A \exp[q_e(\varphi)]$

La proiezione stereografica può essere derivata anche direttamente come proiezione prospettica dal polo opposto su un piano tangente. Il fatto che essa emerga come caso limite della conica conforme dimostra che appartiene alla stessa famiglia di proiezioni conformi.

Per la sfera, la proiezione stereografica polare ha la forma particolarmente semplice:

$x = 2R \tan(\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda - \lambda_0)$
$y = -2R \tan(\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda - \lambda_0)$

o in coordinate polari:

$r = 2R \tan(\pi/4 - \varphi/2)$
$\theta = \lambda - \lambda_0$

Un'importante proprietà della proiezione stereografica è che trasforma cerchi sulla sfera in cerchi sul piano (contando le rette come cerchi di raggio infinito). Questa proprietà, nota come "conservazione dei cerchi" o "proiezione circolare", è esclusiva della stereografica tra tutte le proiezioni azimutali.

Caso 3: Proiezione conica conforme obliqua

Un'estensione importante della proiezione conica conforme standard è la versione obliqua, dove l'asse del cono non coincide con l'asse polare terrestre ma forma un angolo con esso. Questa configurazione è ottimale per regioni che si estendono obliquamente rispetto ai paralleli, come la costa del

Pacifico delle Americhe o il Giappone.
La costruzione matematica richiede una rotazione preliminare del sistema di coordinate sferiche. Definiamo un nuovo sistema di coordinate (φ', λ') ottenuto ruotando il sistema originale in modo che il nuovo polo nord sia posizionato nel punto (φ_p, λ_p) del sistema originale. Le formule di trasformazione tra i due sistemi sono date dalle formule di rotazione sferica:

$$\sin(\varphi') = \sin(\varphi)\sin(\varphi_p) + \cos(\varphi)\cos(\varphi_p)\cos(\lambda - \lambda_p)$$

$$\tan(\lambda' - \lambda'_0) = [\cos(\varphi)\sin(\lambda - \lambda_p)]/[\cos(\varphi)\sin(\varphi_p)\cos(\lambda - \lambda_p) - \sin(\varphi)\cos(\varphi_p)]$$

dove λ'_0 è una costante che definisce l'orientazione del nuovo sistema di longitudine.
Una volta trasformati in coordinate oblique, si applica la proiezione conica conforme standard usando (φ', λ') al posto di (φ, λ). Il risultato è una carta in cui i paralleli standard non sono linee di latitudine costante ma curve che seguono approssimativamente la direzione principale di estensione della regione cartografata.
L'implementazione numerica della proiezione obliqua richiede attenzione particolare ai punti singolari delle trasformazioni trigonometriche, specialmente vicino ai poli del sistema obliquo. Algoritmi robusti utilizzano rappresentazioni vettoriali tridimensionali intermedie per evitare indeterminazioni:

$$P = [\cos(\varphi)\cos(\lambda), \cos(\varphi)\sin(\lambda), \sin(\varphi)]$$

La rotazione è quindi implementata come prodotto matriciale P' = R P dove R è la matrice di rotazione tridimensionale, e le coordinate oblique sono estratte da P' mediante:

$$\varphi' = \arcsin(P'_z)$$
$$\lambda' = \arctan2(P'_y, P'_x)$$

dove arctan2 è la funzione arcotangente a due argomenti che restituisce l'angolo nel quadrante corretto.

Capitolo X: Implementazioni moderne e sistemi di riferimento geodetico

L'era moderna della geodesia digitale ha richiesto la standardizzazione rigorosa dei sistemi di riferimento geodetici e delle loro associate proiezioni cartografiche. Il sistema di riferimento geodetico mondiale WGS84 (World

Geodetic System 1984), sviluppato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti e adottato dal sistema GPS (Global Positioning System), rappresenta attualmente lo standard de facto per la maggior parte delle applicazioni cartografiche digitali globali.

I parametri definitivi dell'ellissoide WGS84, stabiliti nella revisione del 2004 (WGS84-G1150), sono:

Semiasse maggiore: a = 6.378.137,0 m (esatto per definizione)
Fattore di schiacciamento reciproco: 1/f = 298,257223563
Velocità angolare terrestre: ω = 7,292115 × 10^{-5} rad/s
Costante gravitazionale geocentrica: GM = 3,986004418 × 10^{14} m^3/s^2

Da questi parametri fondamentali si derivano:

Semiasse minore: b = a(1 - f) = 6.356.752,314245179 m
Eccentricità prima al quadrato: e^2 = 2f - f^2 = 0,00669437999014132
Eccentricità seconda al quadrato: e'^2 = e^2/(1 - e^2) = 0,00673949674227643
Raggio della sfera di uguale area: R_2 = (a^2 b)^(1/3) = 6.371.008,7714 m
Raggio della sfera di uguale volume: R_3 = (a^2 b)^(1/3) = 6.371.000,7900 m

L'implementazione della proiezione conica conforme di Lambert per l'ellissoide WGS84 segue le formule derivate precedentemente, con particolare attenzione agli aspetti computazionali e alla gestione degli errori numerici.

Algoritmo per la trasformazione diretta (φ, λ) → (x, y):
Input: Latitudine geodetica φ (radianti), Longitudine λ (radianti)
Parametri: a, e^2, φ_1, φ_2, λ_0, x_0, y_0

Step 1: Calcolare la latitudine isometrica q(φ)

Per evitare instabilità numeriche nel calcolo del logaritmo, si utilizza la formulazione con atanh:

$$q(\varphi) = \operatorname{atanh}[\sin(\varphi)] - e \cdot \operatorname{atanh}[e \cdot \sin(\varphi)]$$

La funzione atanh è calcolata come:

$$\operatorname{atanh}(x) = 0{,}5 \cdot \ln[(1 + x)/(1 - x)]$$

con controlli per |x| < 1 per evitare overflow.

Step 2: Calcolare N(φ) per i paralleli standard e per il punto corrente

$$N(\varphi) = a / \sqrt{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]}$$

Step 3: Calcolare la costante del cono n

Per i paralleli standard φ_1 e φ_2:

$$m_1 = \cos(\varphi_1) / \sqrt{[1 - e^2 \sin^2(\varphi_1)]}$$
$$m_2 = \cos(\varphi_2) / \sqrt{[1 - e^2 \sin^2(\varphi_2)]}$$
$$q_1 = \operatorname{atanh}[\sin(\varphi_1)] - e \cdot \operatorname{atanh}[e \cdot \sin(\varphi_1)]$$
$$q_2 = \operatorname{atanh}[\sin(\varphi_2)] - e \cdot \operatorname{atanh}[e \cdot \sin(\varphi_2)]$$

$$n = [\ln(m_1) - \ln(m_2)] / [q_2 - q_1]$$

Per proiezione con un solo parallelo standard φ_0:

$$n = \sin(\varphi_0)$$

Step 4: Calcolare la costante F e il raggio polare ρ_0

$$F = m_1 / [n \cdot \exp(n \cdot q_1)]$$
$$\rho_0 = a \cdot F \cdot \exp(-n \cdot q_0)$$

dove q_0 è la latitudine isometrica del parallelo di riferimento (spesso scelto come φ_1 o come latitudine di origine specificata).

Step 5: Calcolare il raggio ρ(φ) per il punto corrente

$$\rho(\varphi) = a \cdot F \cdot \exp[-n \cdot q(\varphi)]$$

Step 6: Calcolare le coordinate cartesiane

$$\theta = n \cdot (\lambda - \lambda_0)$$
$$x = x_0 + \rho(\varphi) \cdot \sin(\theta)$$
$$y = y_0 + \rho_0 - \rho(\varphi) \cdot \cos(\theta)$$

dove (x_0, y_0) sono le coordinate di falsa origine (false easting e false northing), spesso aggiunte per garantire che tutte le coordinate nella regione di interesse siano positive.

Algoritmo per la trasformazione inversa $(x, y) \rightarrow (\varphi, \lambda)$:

Input: Coordinate cartesiane x, y
Parametri: come sopra

Step 1: Sottrarre la falsa origine

$$x' = x - x_0$$
$$y' = y - y_0$$

Step 2: Calcolare ρ e θ

$$y'' = \rho_0 - y'$$
$$\rho = \text{sign}(n) \cdot \sqrt{[x'^2 + y''^2]}$$
$$\theta = \arctan2(x', y'')$$

dove arctan2(x', y'') calcola l'arcotangente di x'/y'' nel quadrante corretto, con convenzione per gestire y'' = 0.

Step 3: Calcolare la longitudine

$$\lambda = \lambda_0 + \theta/n$$

Step 4: Calcolare la latitudine mediante iterazione di Newton-Raphson

Invertire la relazione $\rho(\varphi) = a \cdot F \cdot \exp[-n \cdot q(\varphi)]$ equivale a risolvere:

$$q(\varphi) = -[\ln(\rho/(a \cdot F))] / n = q_target$$

Definiamo:

$$q_target = -\ln[\rho/(a \cdot F)] / n$$

Dobbiamo risolvere l'equazione trascendente:

$$\text{atanh}[\sin(\varphi)] - e \cdot \text{atanh}[e \cdot \sin(\varphi)] = q_target$$

Questa non ha soluzione in forma chiusa e richiede un metodo iterativo. Il metodo di Newton-Raphson è:

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - [q(\varphi_k) - q_target] / [dq/d\varphi|_{\varphi_k}]$$

La derivata di q rispetto a φ è:

$$dq/d\varphi = \cos(\varphi)/[1 - \sin^2(\varphi)] - e \cdot e \cdot \cos(\varphi)/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]$$
$$= \cos(\varphi) \cdot \{1/\cos^2(\varphi) - e^2/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]\}$$
$$= \sec(\varphi) - [e^2 \cos(\varphi)]/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]$$
$$= \{[1 - e^2 \sin^2(\varphi)] - e^2 \cos^2(\varphi)\}/[\cos(\varphi) \cdot [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]]$$
$$= [1 - e^2]/[\cos(\varphi) \cdot [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]]$$

Alternativamente, usando la relazione $dq/d\varphi = [N(\varphi) \cos(\varphi)]/M(\varphi)$, dove:

$$M(\varphi) = a(1 - e^2) / [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(3/2)}$$

possiamo scrivere:

$$dq/d\varphi = [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(1/2)} \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(3/2)} / [(1 - e^2) \cdot [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{(1/2)}]$$
$$= [1 - e^2 \sin^2(\varphi)] / [(1 - e^2)^{(1/2)} \cdot \cos(\varphi)]$$

Per l'iterazione, si parte da un valore iniziale φ_0 ottenuto dall'approssimazione sferica:

$$\varphi_0 = \pi/2 - 2 \cdot \arctan[\exp(-q_target)]$$

che inverte la formula sferica $q = \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$.

L'iterazione procede quindi:

Iterazione k:
$q_k = \text{atanh}[\sin(\varphi_k)] - e \cdot \text{atanh}[e \cdot \sin(\varphi_k)]$
$dq_k = [1 - e^2 \sin^2(\varphi_k)] / [(1 - e^2)^{(1/2)} \cdot \cos(\varphi_k)]$
$\varphi_\{k+1\} = \varphi_k - (q_k - q_target) / dq_k$

Criteri di convergenza:
$|\varphi_\{k+1\} - \varphi_k| < \text{tolleranza}_\varphi$ (tipicamente 10^{-12} radianti)
oppure
$|q_k - q_target| < \text{tolleranza}_q$ (tipicamente 10^{-15})

In pratica, la convergenza è molto rapida: per punti non troppo vicini ai poli, 3-4 iterazioni sono sufficienti per raggiungere precisione di macchina in aritmetica a doppia precisione (circa 15-16 cifre decimali significative).

Gestione di casi speciali e condizioni limite:

1. Polo Nord ($\varphi \to \pi/2$):

Il raggio ρ tende a zero. Numericamente, per ρ < ε_min (soglia piccola, ad esempio 10^{-6} m), si imposta φ = π/2 e λ indeterminata (convenzionalmente λ_0).

2. Polo Sud (φ → -π/2):
Il raggio ρ tende a infinito per n > 0. Per ρ > ρ_max (soglia grande), si imposta φ = -π/2.

3. Paralleli standard coincidenti ($\varphi_1 = \varphi_2$):
La formula per n diventa indeterminata 0/0. Si usa il limite:

$$n = \lim[\varphi_2 \to \varphi_1] \left[\ln[N(\varphi_1)\cos(\varphi_1)] - \ln[N(\varphi_2)\cos(\varphi_2)]\right] / [q(\varphi_1) - q(\varphi_2)]$$

applicando la regola di de l'Hôpital:

$$n = -d[\ln[N(\varphi)\cos(\varphi)]]/d\varphi \,/\, [dq/d\varphi] \,|_{\{\varphi=\varphi_1\}}$$

Calcolando le derivate:

$$d[\ln[N(\varphi)\cos(\varphi)]]/d\varphi = d[\ln N]/d\varphi + d[\ln\cos(\varphi)]/d\varphi$$
$$= [e^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)]/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)] - \tan(\varphi)$$

e usando $dq/d\varphi = [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]/[(1 - e^2)^{(1/2)} \cos(\varphi)]$, si ottiene dopo semplificazione:

$$n = \sin(\varphi_1)$$

Questo conferma che la proiezione con parallelo standard singolo ha $n = \sin(\varphi_0)$.

4. Overflow/underflow in $\exp[n \cdot q(\varphi)]$:
Per latitudini estreme o valori grandi di |n|, l'esponenziale può causare overflow o underflow. Si usano controlli:

- Se $n \cdot q(\varphi) > \ln(\text{MAX_FLOAT}) \approx 700$, il punto è oltre il limite rappresentabile
- Se $n \cdot q(\varphi) < \ln(\text{MIN_FLOAT}) \approx -700$, ρ → 0, punto vicino al polo

Capitolo XI: Applicazioni pratiche e sistemi cartografici nazionali

La proiezione conica conforme di Lambert è stata adottata come proiezione ufficiale da numerosi sistemi cartografici nazionali e regionali, data la sua capacità di minimizzare le distorsioni per regioni di estensione medio-

longitudinale. La scelta dei parametri specifici (paralleli standard, meridiano centrale, origini) varia da paese a paese in funzione della configurazione geografica del territorio.

Sistema Lambert Conforme per la Francia
La Francia ha adottato storicamente diverse zone Lambert per coprire il suo territorio metropolitano. Il sistema classico, stabilito nel 1922 e utilizzato fino alla fine del XX secolo, comprendeva quattro zone:

- Lambert I (Nord): φ_1 = 49,5° N, φ_2 = 48,5° N
- Lambert II (Centro): φ_1 = 46,8° N, φ_2 = 45,8° N
- Lambert III (Sud): φ_1 = 44,1° N, φ_2 = 43,1° N
- Lambert IV (Corsica): φ_1 = 42,165° N, φ_2 = 41,165° N

Tutte le zone usavano il meridiano di Parigi (2°20'14,025" E di Greenwich) come meridiano centrale. L'ellissoide di riferimento era il Clarke 1880 modificato (IGN), con:

a = 6.378.249,2 m
1/f = 293,46602

Nel 1993, la Francia adottò un nuovo sistema unificato, Lambert 93, basato su:

- Ellissoide: GRS80 (praticamente identico a WGS84)
- Proiezione: Conica conforme con φ_1 = 49° N, φ_2 = 44° N
- Meridiano centrale: λ_0 = 3° E
- Latitudine di origine: φ_0 = 46,5° N
- False easting: x_0 = 700.000 m
- False northing: y_0 = 6.600.000 m

Questa scelta permette di coprire l'intero territorio metropolitano francese con una singola proiezione, mantenendo distorsioni di scala inferiori a 0,6% ovunque. La configurazione con due paralleli standard a 49° e 44° bilancia ottimamente le distorsioni tra il nord e il sud del paese.

State Plane Coordinate System (USA)
Gli Stati Uniti utilizzano il sistema di coordinate State Plane (SPCS), sviluppato negli anni 1930 dalla U.S. Coast and Geodetic Survey. Questo sistema divide ciascuno stato in una o più zone, ciascuna con la propria proiezione ottimizzata per minimizzare le distorsioni.

Per stati con estensione prevalentemente est-ovest (come Tennessee, Kentucky, North Carolina), si utilizza la proiezione conica conforme di Lambert. Ad esempio:

North Carolina (zona unica):
- Ellissoide: NAD83 (North American Datum 1983, simile a GRS80)
- φ_1 = 34°20' N, φ_2 = 36°10' N
- λ_0 = 79° W
- φ_0 = 33°45' N
- x_0 = 609.601,22 m (2.000.000 ft)
- y_0 = 0 m

Tennessee:
- Ellissoide: NAD83
- φ_1 = 35°15' N, φ_2 = 36°25' N
- λ_0 = 86° W
- φ_0 = 34°20' N
- x_0 = 600.000 m
- y_0 = 0 m

Il sistema SPCS garantisce che le distorsioni di scala siano inferiori a 1:10.000 (0,01%) in qualsiasi punto all'interno della zona, un'accuratezza più che sufficiente per praticamente tutte le applicazioni di ingegneria civile, catastali e topografiche.

Universal Transverse Mercator vs Lambert: considerazioni comparative

Per regioni di estensione nord-sud, la proiezione Universal Transverse Mercator (UTM), che è una proiezione cilindrica trasversa conforme, è generalmente preferita alla conica conforme di Lambert. La scelta tra le due dipende dalla forma della regione:

- Forma allungata est-ovest (latitudine > longitudine): Lambert preferibile
  Esempio: Francia, USA stati meridionali, Turchia, Iran

- Forma allungata nord-sud (longitudine > latitudine): UTM preferibile
  Esempio: Cile, Norvegia, Nuova Zelanda, stati costieri USA

- Forma approssimativamente quadrata: entrambe valide
  La scelta può dipendere da considerazioni di continuità con sistemi adiacenti

La differenza fondamentale risiede nella geometria delle linee a scala vera:
- Lambert: linee di scala vera sono paralleli (curve est-ovest)
- UTM: linee di scala vera sono meridiani (linee nord-sud)

Parte Terza: oltre Lambert - sviluppi Moderni

Capitolo XII: La Proiezione azimutale equivalente di Lambert

Oltre alle proiezioni conformi, Lambert sviluppò anche proiezioni equivalenti (equal-area), che sacrificano la preservazione degli angoli per mantenere esattamente le aree. La proiezione azimutale equivalente di Lambert rappresenta una delle sue realizzazioni più importanti in questa categoria.
Il termine "azimutale" indica che la proiezione preserva gli azimut (direzioni angolari) dal centro della proiezione verso tutti gli altri punti. Più precisamente, una proiezione azimutale, detta anche zenitale, ha la proprietà che il grande cerchio passante per il centro della proiezione P_o e un qualsiasi altro punto P sulla sfera viene mappato in una linea retta sulla carta, e l'angolo che questa retta forma con una direzione di riferimento (tipicamente il nord) è uguale all'azimut geodetico da P_o a P.
La derivazione della proiezione azimutale equivalente parte dalla parametrizzazione in coordinate polari geodetiche centrate nel punto $P_o = (\varphi_o, \lambda_o)$. Per semplicità, consideriamo inizialmente il caso polare con P_o al polo nord: $\varphi_o = \pi/2$.
In questo caso, le coordinate naturali sono la colatitudine $\chi = \pi/2 - \varphi$ (distanza angolare dal polo) e la longitudine λ. La metrica sferica in queste coordinate è:

$$ds^2 = R^2 d\chi^2 + R^2 \sin^2(\chi) d\lambda^2$$

Per una proiezione azimutale centrata al polo, i meridiani (λ = costante) vengono mappati in raggi emananti dall'origine, e i paralleli (χ = costante) in cerchi concentrici. Possiamo quindi scrivere le coordinate cartesiane come:

$$x = r(\chi) \sin(\lambda)$$
$$y = -r(\chi) \cos(\lambda)$$

dove $r(\chi)$ è il raggio sul piano corrispondente alla colatitudine χ.

L'elemento di area sulla sfera è $dA_{sfera} = R^2 \sin(\chi) d\chi d\lambda$. L'elemento di area sul piano è:

$$dA_{piano} = |\det(J)| d\chi d\lambda$$

dove J è la matrice jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \chi & \partial x/\partial \lambda \\ \partial y/\partial \chi & \partial y/\partial \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r' \sin(\lambda) & r \cos(\lambda) \\ -r' \cos(\lambda) & r \sin(\lambda) \end{bmatrix}$$

con $r' = dr/d\chi$. Il determinante è:

$$\det(J) = r' \sin(\lambda) \cdot r \sin(\lambda) - r \cos(\lambda) \cdot (-r' \cos(\lambda))$$
$$= r' r \sin^2(\lambda) + r' r \cos^2(\lambda)$$
$$= r' r$$

Quindi $dA_{piano} = |r' r| \, d\chi \, d\lambda = r \, |dr/d\chi| \, d\chi \, d\lambda$.

Per l'equivalenza, richiediamo $dA_{piano} = dA_{sfera}$:

$$r \, |dr/d\chi| = R^2 \sin(\chi)$$

Assumendo r crescente con χ (allontanandosi dal polo), $dr/d\chi > 0$, quindi:

$$r \, dr = R^2 \sin(\chi) \, d\chi$$

Integrando da $\chi = 0$ (polo, dove $r = 0$) a χ generico:

$$\int_{0}^{r} r' \, dr' = R^2 \int_{0}^{\chi} \sin(\chi') \, d\chi'$$

$$r^2/2 = R^2 \left[-\cos(\chi')\right]_0^{\chi} = R^2 \left[1 - \cos(\chi)\right]$$

$$r^2 = 2R^2 \left[1 - \cos(\chi)\right]$$

Usando l'identità trigonometrica $1 - \cos(\chi) = 2 \sin^2(\chi/2)$:

$$r^2 = 4R^2 \sin^2(\chi/2)$$

$$r = 2R \sin(\chi/2)$$

Questa è la legge di scala radiale per la proiezione azimutale equivalente di Lambert in configurazione polare. Le coordinate cartesiane sono:

$$x = 2R \sin(\chi/2) \sin(\lambda) = 2R \sin[(\pi/2 - \varphi)/2] \sin(\lambda)$$
$$y = -2R \sin(\chi/2) \cos(\lambda) = -2R \sin[(\pi/2 - \varphi)/2] \cos(\lambda)$$

Usando $\sin[(\pi/2 - \varphi)/2] = \cos(\varphi/2)$ e le formule di bisezione:

$\sin[(\pi/2 - \varphi)/2] = \sqrt{[(1 + \sin(\varphi))/2]}$

otteniamo:

$x = 2R \sqrt{[(1 - \sin(\varphi))/2]} \sin(\lambda)$
$y = -2R \sqrt{[(1 - \sin(\varphi))/2]} \cos(\lambda)$

Per la proiezione azimutale equivalente centrata in un punto generico (φ_o, λ_o), non necessariamente al polo, la derivazione richiede l'uso di formule di trigonometria sferica. La distanza angolare χ tra il centro P_o e un punto P di coordinate (φ, λ) è data dalla formula del coseno sferico:

$\cos(\chi) = \sin(\varphi_o) \sin(\varphi) + \cos(\varphi_o) \cos(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_o)$

L'azimut α da P_o verso P è dato da:

$\tan(\alpha) = [\cos(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_o)] / [\cos(\varphi_o) \sin(\varphi) - \sin(\varphi_o) \cos(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_o)]$

Le coordinate cartesiane sono quindi:

$x = 2R \sin(\chi/2) \sin(\alpha)$
$y = 2R \sin(\chi/2) \cos(\alpha)$

Sostituendo le espressioni trigonometriche e semplificando usando le identità di addizione, si ottengono le formule esplicite:

$k' = 2R / \sqrt{[1 + \sin(\varphi_o) \sin(\varphi) + \cos(\varphi_o) \cos(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_o)]}$

$x = k' \cos(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_o)$
$y = k' [\cos(\varphi_o) \sin(\varphi) - \sin(\varphi_o) \cos(\varphi) \cos(\lambda - \lambda_o)]$

dove k' è un fattore di scala che dipende dalla posizione del punto.

Analisi delle distorsioni:
A differenza delle proiezioni conformi dove l'indicatrice di Tissot è sempre un cerchio, per proiezioni equivalenti l'indicatrice è un'ellisse con area costante (pari all'area del cerchio infinitesimale sulla sfera), ma con rapporto assiale variabile.
Per la proiezione azimutale equivalente, il fattore di scala lungo la direzione radiale (dal centro verso l'esterno) è:

$k_r = dr/[R\, d\chi] = [2R \cos(\chi/2)]/[2R] = \cos(\chi/2)$

Il fattore di scala lungo la direzione tangenziale (perpendicolare al raggio) è:

$k_t = r/[R \sin(\chi)] = [2R \sin(\chi/2)]/[R \sin(\chi)]$

Usando $\sin(\chi) = 2 \sin(\chi/2) \cos(\chi/2)$:

$k_t = [2R \sin(\chi/2)]/[R \cdot 2 \sin(\chi/2) \cos(\chi/2)] = 1/\cos(\chi/2) = \sec(\chi/2)$

Notiamo che $k_r \cdot k_t = \cos(\chi/2) \cdot \sec(\chi/2) = 1$, confermando l'equivalenza (conservazione delle aree). L'ellisse di Tissot ha semiassi $a = k_t = \sec(\chi/2)$ e $b = k_r = \cos(\chi/2)$, con area $\pi ab = \pi$, identica all'area del cerchio unitario.

Al centro della proiezione ($\chi = 0$), $k_r = k_t = 1$, quindi la proiezione è localmente conforme al centro. Allontanandosi dal centro, k_r decresce mentre k_t cresce, con distorsione angolare che aumenta. All'equatore opposto ($\chi = \pi$), $k_r \to 0$ e $k_t \to \infty$, indicando distorsione infinita. Per questo motivo, la proiezione azimutale equivalente è tipicamente utilizzata solo per emisferi o regioni di estensione angolare inferiore a 90° dal centro.

Applicazioni della proiezione azimutale equivalente:

1. Mappe polari: Ideale per regioni polari, preservando le aree dei ghiacci, essenziale per studi climatici.

2. Mappe oceaniche: Per rappresentazioni dell'oceano centrate su una specifica cuenca oceanica.

3. Mappe stellari: In astronomia, per rappresentazioni della sfera celeste preservando le dimensioni apparenti delle costellazioni.

4. Statistiche geografiche: Quando è necessario rappresentare dati statistici areali (densità di popolazione, produzione agricola, ecc.) senza bias sistematici dovuti a distorsioni areali.

Capitolo XIII: Proiezioni pseudo-coniche e compromessi moderni

Lo sviluppo della cartografia nel diciannovesimo e ventesimo secolo vide l'emergere di numerose proiezioni che cercavano compromessi diversi tra conformità, equivalenza ed equidistanza. Alcune di queste mantengono la struttura geometrica della proiezione conica (paralleli come archi di cerchio concentrici, meridiani come raggi) ma modificano le relazioni metriche per ottenere proprietà desiderate.

Proiezione di Bonne:
La proiezione di Bonne, sviluppata già nel sedicesimo secolo ma sistematizzata matematicamente nel diciottesimo, è una proiezione pseudo-conica equivalente. Il parallelo standard è rappresentato come un arco di cerchio alla sua lunghezza vera, e tutti i paralleli sono rappresentati come archi di cerchio concentrici, equidistanti lungo il meridiano centrale.
La caratteristica distintiva è che i meridiani non sono raggi rettilinei ma curve che si incurvano in modo da preservare le aree. Le formule in coordinate polari (r, θ) sono:

$r = \rho_0 - R(\varphi - \varphi_0)$
$\theta = [R \cos(\varphi)/r] \cdot (\lambda - \lambda_0)$

$x = r \sin(\theta)$
$y = \rho_0 - r \cos(\theta)$

dove $\rho_0 = R [\cot(\varphi_0) + \varphi_0]$ è il raggio del parallelo standard φ_0.

La proiezione di Bonne è equivalente e ha distorsioni minime lungo il meridiano centrale e il parallelo standard, ma le distorsioni angolari crescono rapidamente allontanandosi da queste linee. Fu utilizzata estensivamente per mappe topografiche europee nel diciannovesimo secolo, in particolare per la cartografia francese prima dell'adozione delle proiezioni di Lambert.

Proiezione di Albers:
La proiezione conica equivalente di Albers, presentata da Heinrich Christian Albers nel 1805, è analoga alla proiezione conica conforme di Lambert ma sacrifica la conformità per preservare le aree. Come la Lambert, può avere uno o due paralleli standard.

Le formule sono derivate imponendo l'equivalenza invece della conformità. Il raggio $\rho(\varphi)$ soddisfa una diversa equazione differenziale:

$\rho^2 = C - 2n\, a^2 \sin(\varphi) / (1 - e^2)$

dove C è una costante determinata dalle condizioni sui paralleli standard. Per l'approssimazione sferica:

$\rho = (R/n) \sqrt{[n^2 + 2n(\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi))]}$

con:

$n = [\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2)] / 2$

Le coordinate cartesiane mantengono la forma:

$x = \rho \sin[n(\lambda - \lambda_0)]$
$y = \rho_0 - \rho \cos[n(\lambda - \lambda_0)]$

La proiezione di Albers è ampiamente utilizzata per mappe tematiche di grandi regioni dove la precisione delle statistiche areali è essenziale. Ad esempio, molte mappe statistiche degli Stati Uniti continentali utilizzano Albers con $\varphi_1 = 29,5°$ N e $\varphi_2 = 45,5°$ N.

Confronto quantitativo Lambert vs Albers:

Per una regione standard come gli USA continentali (circa 25°-50° N, 125°-67° W), consideriamo le distorsioni:

Lambert Conforme ($\varphi_1 = 33°$ N, $\varphi_2 = 45°$ N):
- Distorsione di scala: max 1,7% ai bordi
- Distorsione areale: max 3,5% ai bordi
- Distorsione angolare: 0° (conforme)

Albers Equivalente ($\varphi_1 = 29,5°$ N, $\varphi_2 = 45,5°$ N):
- Distorsione di scala: max 1,25% ai bordi
- Distorsione areale: 0% (equivalente)
- Distorsione angolare: max 2° ai bordi

La scelta dipende dall'applicazione: Lambert per navigazione e applicazioni dove gli angoli sono critici, Albers per analisi statistiche areali.

Capitolo XIV: Trasformazioni tra sistemi di riferimento e datum

Un aspetto cruciale della cartografia moderna è la necessità di trasformare coordinate tra diversi sistemi di riferimento geodetici (datum). Storicamente, ogni nazione o regione ha sviluppato il proprio datum geodetico basato su misurazioni locali, con ellissoidi di riferimento, orientazioni e origini diversi.

Definizione di datum geodetico:

Un datum geodetico è completamente specificato da:

1. Un ellissoide di riferimento (parametri a, f)

2. L'orientazione dell'ellissoide nello spazio (rotazioni α_x, α_y, α_z)
3. La posizione del centro dell'ellissoide (traslazioni δ_x, δ_y, δ_z)
4. Un fattore di scala δ_s

Trasformazione di Helmert a 7 parametri:

La trasformazione standard tra due datum geodetici è la trasformazione di similitudine di Helmert a 7 parametri. Date le coordinate cartesiane geocentriche (X_1, Y_1, Z_1) nel datum 1, le corrispondenti coordinate (X_2, Y_2, Z_2) nel datum 2 sono:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} + (1+\delta_s)\, R \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

dove R è la matrice di rotazione tridimensionale:

$$R = R_z(\alpha_z)\, R_y(\alpha_y)\, R_x(\alpha_x)$$

Per rotazioni piccole (tipicamente pochi secondi d'arco), si può usare l'approssimazione linearizzata:

$$R \approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha_z & -\alpha_y \\ -\alpha_z & 1 & \alpha_x \\ \alpha_y & -\alpha_x & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: WGS84 ↔ European Datum 1950 (ED50)

I parametri di trasformazione da ED50 a WGS84 per l'Europa occidentale sono approssimativamente:

δ_x = -87,0 m
δ_y = -98,0 m
δ_z = -121,0 m
α_x = 0,0 secondi d'arco
α_y = 0,0 secondi d'arco
α_z = 0,0 secondi d'arco
δ_s = 0,0 ppm

Le differenze possono raggiungere oltre 150 metri in planimetria, sottolineando l'importanza critica di specificare correttamente il datum di riferimento.

Procedura completa di trasformazione con cambio di proiezione:

Per trasformare coordinate da una proiezione Lambert in datum A a una proiezione UTM in datum B:

Step 1: Trasformazione inversa Lambert → (φ_A, λ_A) in datum A
Step 2: Conversione $(\varphi_A, \lambda_A) \rightarrow (X_A, Y_A, Z_A)$ coordinate geocentriche
Step 3: Trasformazione Helmert $(X_A, Y_A, Z_A) \rightarrow (X_B, Y_B, Z_B)$
Step 4: Conversione $(X_B, Y_B, Z_B) \rightarrow (\varphi_B, \lambda_B)$ in datum B
Step 5: Trasformazione diretta (φ_B, λ_B) → coordinate UTM in datum B

La conversione geografiche ↔ geocentriche utilizza:

Geografiche → Geocentriche:
$X = [N(\varphi) + h] \cos(\varphi) \cos(\lambda)$
$Y = [N(\varphi) + h] \cos(\varphi) \sin(\lambda)$
$Z = [N(\varphi)(1 - e^2) + h] \sin(\varphi)$

dove h è l'altezza ellissoidica sopra l'ellissoide.

Geocentriche → Geografiche (metodo iterativo di Bowring):
Il problema inverso non ha soluzione chiusa e richiede iterazione. Un algoritmo efficiente è:

$p = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$
$\theta = \arctan[Z \cdot a / (p \cdot b)]$
$\varphi = \arctan\{[Z + e'^2 b \sin^3(\theta)] / [p - e^2 a \cos^3(\theta)]\}$
$\lambda = \arctan2(Y, X)$
$h = p/\cos(\varphi) - N(\varphi)$
dove $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$ è l'eccentricità seconda al quadrato.

Capitolo XV: Sistemi di proiezione per mappe eeb e Cartografia digitale

L'avvento di internet e delle piattaforme di mappe digitali interattive (Google Maps, OpenStreetMap, Bing Maps, ecc.) ha portato all'adozione quasi universale della proiezione Web Mercator, nota anche come "Pseudo-Mercator" o "Google Mercator" (identificatore EPSG:3857).

Web Mercator: caratteristiche e controversie
Web Mercator è essenzialmente una proiezione di Mercatore sferica, ma applicata a un modello sferico della Terra di raggio $R = a_{WGS84} = 6.378.137$ m, ignorando completamente lo schiacciamento ellissoidale. Le formule sono:

$x = R \cdot (\lambda - \lambda_0)$
$y = R \cdot \ln[\tan(\pi/4 + \varphi/2)]$

oppure, equivalentemente:

$y = R \cdot \operatorname{atanh}[\sin(\varphi)]$

Nonostante le coordinate di input siano latitudini e longitudini geodetiche riferite all'ellissoide WGS84, la proiezione tratta la Terra come perfettamente sferica. Questo introduce errori sistematici dell'ordine di 0,33% nelle distanze a medie latitudini, errore che alcuni considerano inaccettabile per applicazioni geodetiche serie.

Vantaggi di Web Mercator:

Semplicità computazionale: Le formule sferiche sono significativamente più semplici da calcolare rispetto alle formule ellissoidali complete. Su miliardi di trasformazioni al secondo richieste da piattaforme web globali, questo risparmio è significativo.
Sistema quadrato perfetto: Per ogni livello di zoom z, la mappa è divisa in 2^z × 2^z tile (tessere quadrate), ciascuna di dimensione fissa in pixel (tipicamente 256×256). Questa struttura facilita enormemente il caching, il rendering e la gestione delle immagini.
Continuità matematica: A differenza di sistemi a zone multiple (come UTM o State Plane), Web Mercator copre il mondo intero con un sistema di coordinate continuo (eccetto le regioni polari oltre ±85,05°).

Calcolo delle coordinate tile:
Per un dato livello di zoom z e coordinate geografiche (φ, λ):
x_tile = floor[(λ + 180°)/360° · 2^z]
y_tile = floor[(1 - ln[tan(φ) + sec(φ)]/π) / 2 · 2^z]
Queste formule mappano il mondo in un quadrato di lato 2^z tile. Al livello 0, l'intero mondo è contenuto in un'unica tile. Al livello 1, in 2×2 = 4 tile. Al livello 20, in oltre un trilione di tile, con risoluzione sub-metrica.
La limitazione a latitudini ±85,05112878° (precisamente ±atanh(tanh(π)) dove la funzione y tende asintoticamente a ±∞) garantisce che la mappa proiettata sia un quadrato perfetto anziché un rettangolo infinito.
Critiche e alternative:
La comunità cartografica professionale ha sollevato obiezioni significative a Web Mercator:

Violazione degli standard: La proiezione non è conforme agli standard ISO

19111 e alle raccomandazioni dell'OGC (Open Geospatial Consortium) per sistemi di riferimento geodetici.
Imprecisioni sistematiche: Gli errori nella distanza e nell'area sono sistematici e non casuali, introducendo bias in analisi spaziali quantitative.
Perpetuazione di distorsioni cognitive: Come la Mercatore classica, Web Mercator esagera enormemente le dimensioni delle regioni ad alta latitudine, potenzialmente rafforzando percezioni distorte della geografia mondiale.

Le alternative proposte includono:

Mercatore ellissoidale vera (EPSG:3395): Usa formule ellissoidali complete, più accurata ma computazionalmente più costosa.
Proiezioni adattive: Cambiano dinamicamente in base al livello di zoom e alla regione visualizzata.
Equal Earth o Robinson: Per visualizzazioni a scala mondiale con distorsioni più bilanciate.

Capitolo XVI: Teoria della distorsione minima e proiezioni ottimali

Un filone importante della ricerca cartografica moderna si concentra sulla formulazione matematica rigorosa del problema di minimizzazione delle distorsioni e sulla derivazione di proiezioni ottimali secondo criteri quantitativi specifici.
Funzionali di distorsione:
Dato un dominio D sulla superficie sferica e una proiezione $f: D \to R^2$, possiamo definire vari funzionali che quantificano la distorsione totale:

Integrale della varianza di scala (Airy):

$$E_Airy[f] = \iint_D [k_1(p) - 1]^2 + [k_2(p) - 1]^2 \, dA$$

dove $k_1(p)$ e $k_2(p)$ sono i fattori di scala principale (autovalori del tensore metrico pullback) nel punto p.

Integrale dell'energia conformale (Lagrange):

$$E_conf[f] = \iint_D [k_1(p) - k_2(p)]^2 \, dA$$

Questo misura la deviazione dalla conformità. Per proiezioni perfettamente conformi, $E_conf = 0$.

Errore areale integrato:

$E_area[f] = \iint_D [k_1(p)k_2(p) - 1]^2 \, dA$

Per proiezioni equivalenti, $E_area = 0$.

Teorema di Euler-Lagrange per proiezioni ottimali:
Il problema di minimizzare un funzionale di distorsione soggetto a vincoli (ad esempio, fissando la proiezione sul bordo del dominio) porta a equazioni di Euler-Lagrange che devono essere soddisfatte dalla proiezione ottimale.
Per il criterio di Airy, le equazioni di Euler-Lagrange conducono a un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche non lineari del secondo ordine per le coordinate cartesiane $x(\varphi, \lambda)$ e $y(\varphi, \lambda)$:

$\nabla^2 x = F_1(x, y, \nabla x, \nabla y)$
$\nabla^2 y = F_2(x, y, \nabla x, \nabla y)$

dove ∇^2 è l'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera e F_1, F_2 sono funzioni non lineari delle coordinate e dei loro gradienti.
Queste equazioni non ammettono generalmente soluzioni analitiche in forma chiusa e devono essere risolte numericamente usando metodi agli elementi finiti o alle differenze finite.

Proiezioni polinomiali ottimizzate:
Un approccio pratico consiste nel parametrizzare la proiezione mediante polinomi di grado elevato e ottimizzare i coefficienti per minimizzare numericamente il funzionale di distorsione.
Ad esempio, una proiezione polinomiale di grado n ha la forma:

$x = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \varphi^i \lambda^j$
$y = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_{ij} \varphi^i \lambda^j$

I coefficienti $\{a_{ij}, b_{ij}\}$ sono determinati risolvendo un problema di ottimizzazione non lineare vincolata:
min E[f]
soggetto a vincoli di conformità parziale, equivalenza approssimata, o altre condizioni.
Proiezioni moderne come la Natural Earth (sviluppata da Tom Patterson nel 2007) e l'Equal Earth (Šavrič, Patterson & Jenny, 2019) utilizzano questo approccio, con coefficienti ottimizzati mediante algoritmi evolutivi o tecniche di ottimizzazione stocastica.
In un sistema di proiezione gerarchico, diverse proiezioni sono utilizzate a scale diverse:

Scala globale (1:100.000.000 e oltre): Proiezioni compromise come Robinson, Winkel Tripel, o Equal Earth
Scala continentale (1:10.000.000): Proiezioni coniche per regioni mid-latitudine, azimutali per regioni polari
Scala nazionale (1:1.000.000): Sistemi standard come Lambert o UTM ottimizzati per il paese
Scala locale (1:50.000 e maggiore): Proiezioni conformi con distorsioni sub-percentuali

Transizioni continue:
Il problema delle transizioni tra scale può essere affrontato mediante interpolazione tra diverse proiezioni. Dato un parametro di scala $s \in [0,1]$, possiamo definire una proiezione interpolata:
$f_s = (1-w(s)) f_1 + w(s) f_2$
dove f_1 e f_2 sono due proiezioni e $w(s)$ è una funzione di peso liscia (ad esempio una sigmoide).
Tuttavia, l'interpolazione diretta delle coordinate non garantisce che f_s sia una proiezione valida (può non essere biettiva o può introdurre discontinuità). Un approccio più sofisticato interpola i parametri delle proiezioni piuttosto che le coordinate stesse.

Proiezioni content-aware:
Un'area emergente è lo sviluppo di proiezioni che si adattano al contenuto specifico della mappa. Ad esempio:

Minimizzazione delle distorsioni su feature specifiche: Se la mappa deve mostrare principalmente coste, ottimizzare la proiezione per minimizzare distorsioni lungo le linee costiere.
Preservazione della topologia di reti: Per mappe di trasporto, modificare la proiezione per preservare relazioni topologiche tra nodi e archi del network.
Bilanciamento popolazione-area: Proiezioni "cartogrammi" che distorcono deliberatamente l'area proporzionalmente alla popolazione, mantenendo riconoscibilità della forma geografica.

Capitolo XVIII: Implementazione numerica avanzata e algoritmi robusti

L'implementazione software di alta qualità delle trasformazioni cartografiche richiede attenzione meticolosa a numerose questioni di precisione numerica, robustezza algoritmica e gestione dei casi limite.

Accuratezza numerica e propagazione degli errori:
In aritmetica a virgola mobile IEEE 754 doppia precisione (64 bit), il numero di

cifre decimali significative è circa 15-16. Questo limita la precisione assoluta raggiungibile nelle trasformazioni.
Per coordinate geografiche espresse in gradi, un errore di 10^{-12} gradi corrisponde a circa 0,1 millimetri sulla superficie terrestre. Per applicazioni geodetiche di altissima precisione (VLBI, GPS post-processing), potrebbe essere necessaria aritmetica estesa o algoritmi compensati.

Algoritmi di sommazione compensata (Kahan):
Quando si accumulano molti termini in serie (ad esempio, espansioni in serie di Fourier per funzioni ellittiche), l'errore di arrotondamento può accumularsi significativamente. L'algoritmo di Kahan fornisce sommazione compensata:

```
sum = 0,0
c = 0,0  // compensazione errore
per ogni valore val da sommare:
y = val - c
t = sum + y
c = (t - sum) - y
sum = t
```

Questo riduce l'errore di arrotondamento da $O(n \cdot \varepsilon)$ a $O(\varepsilon)$ dove n è il numero di termini e ε è epsilon macchina.

Calcolo stabile di funzioni trigonometriche per argomenti grandi:
Per longitudine λ molto diversa dal meridiano centrale λ_0, l'argomento $(\lambda - \lambda_0)$ può essere grande in valore assoluto. Le funzioni sin e cos hanno errore relativo crescente per argomenti grandi.
Una tecnica robusta è la riduzione di range:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$
$$\Delta\lambda_reduced = \Delta\lambda - 2\pi \cdot round(\Delta\lambda/(2\pi))$$

Questo porta Δλ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ dove le funzioni trigonometriche sono più accurate.

Gestione delle singolarità:
Molte formule di proiezione hanno singolarità matematiche ai poli o su altri punti speciali. Ad esempio, nella trasformazione inversa di Lambert, il calcolo di λ da arctan2(x, y'') diventa indeterminato quando x = y'' = 0 (polo).
Strategia generale:

```
if (ρ < ε_pole) {
```

φ = (n > 0) ? π/2 : -π/2; // polo nord o sud
λ = λ_0; // longitudine indeterminata, usa default
return;
}

dove ε_pole è una soglia piccola (ad esempio 10^{-6} m).

Test di validazione e suite di riferimento:
Implementazioni professionali devono essere validate contro dataset di test standardizzati. Il progetto PROJ (libreria open-source per trasformazioni geodetiche, successore di PROJ.4) mantiene suite di test con migliaia di punti di controllo per ogni proiezione, calcolati con precisione estesa.

Esempio di test per Lambert:
Test point: φ = 45°, λ = 5° E
Lambert Zone France II (φ_1 = 45,8989°, φ_2 = 47,6960°, λ_0 = 2,3372°)
Expected: x = 600.000,000 m, y = 200.000,000 m
Tolerance: ±0,01 m
Una implementazione che non passa questi test entro la tolleranza specificata non è considerata affidabile per uso professionale.

Capitolo XIX: Estensioni tridimensionali e proiezioni per corpi celesti non sferici
La teoria delle proiezioni si estende naturalmente a corpi celesti diversi dalla Terra e a rappresentazioni tridimensionali.

Cartografia di corpi triassiali:
Molti satelliti e asteroidi hanno forma meglio approssimata da ellissoidi triassiali (tre semiassi diversi a > b > c) piuttosto che ellissoidi di rotazione. Un esempio è Marte, con semiassi:

a = 3.396,19 km
b = 3.396,19 km
c = 3.376,20 km

Per corpi triassiali, non esiste rotazione assiale completa e le formule devono essere generalizzate. Una parametrizzazione standard usa coordinate geodetiche triassiali (φ, λ, h) dove φ e λ sono definite rispetto all'ellissoide di riferimento triassiale.
La metrica su un ellissoide triassiale non ha forma chiusa semplice. I raggi di curvatura M(φ, λ) e N(φ, λ) dipendono sia dalla latitudine che dalla longitudine:

$N(\varphi, \lambda) = abc / \sqrt{[bc \cos(\varphi)]^2 + [ac \sin(\varphi) \cos(\lambda)]^2 + [ab \sin(\varphi) \sin(\lambda)]^2}$

Questa complessità aggiuntiva richiede metodi numerici per praticamente tutte le operazioni geodetiche.

Proiezioni per superfici planetarie:
La International Astronomical Union (IAU) ha standardizzato sistemi di coordinate per tutti i corpi del sistema solare. Per pianeti e satelliti maggiori, si utilizzano adattamenti delle proiezioni terrestri standard.
Ad esempio, per Marte si usa comunemente:

Equatorial Cylindrical (Simple Cylindrical): $x = R \lambda$, $y = R \varphi$
Molto semplice ma con enormi distorsioni polari.
Lambert Conformal Conic: Con parametri ottimizzati per specifiche regioni di interesse (ad es., siti di atterraggio missioni).
Polar Stereographic: Per regioni polari, particolarmente importante per studiare le calotte di ghiaccio.

Proiezioni sferiche gerarchiche:
Per applicazioni di computer graphics e simulazioni scientifiche globali, sono state sviluppate proiezioni sferiche gerarchiche che suddividono ricorsivamente la superficie sferica.

HEALPix (Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization):
Sviluppata per applicazioni in astrofisica (radiazione cosmica di fondo), HEALPix suddivide la sfera in 12 regioni di base, ciascuna ulteriormente suddivisa ricorsivamente in 4^k pixel per il livello k.
Proprietà chiave:

Tutti i pixel hanno area identica (equivalenza esatta)
Le linee di latitudine costante sono rette (facilitando integrazioni)
Efficiente per trasformate sferiche armoniche

Parametrizzazione:
Per risoluzione N_{side} (numero di divisioni per lato), il numero totale di pixel è: $N_{pix} = 12 N_{side}^2$
Ogni pixel è indicizzato da un intero $0 \leq p < N_{pix}$. Le coordinate (φ, λ) del centro del pixel p sono calcolate mediante formule ottimizzate che evitano valutazioni trigonometriche costose.
TOAST (Tessellation of the Sphere):
Sviluppata per cartografia astronomica, TOAST usa suddivisione ricorsiva di triangoli sferici. Partendo da un icosaedro (20 facce triangolari), ogni

triangolo è ricorsivamente suddiviso in 4 triangoli più piccoli.
Livello 0: 20 triangoli
Livello k: 20 · 4^k triangoli
Questa struttura è particolarmente efficiente per rappresentazioni multi-risoluzione e LOD (Level of Detail) in rendering 3D interattivo.

Capitolo XX: Applicazioni avanzate: geodesia satellitare e navigazione inerziale
Le moderne applicazioni geodetiche richiedono integrazione tra sistemi di proiezione cartografica e tecnologie di posizionamento satellitare.

Integrazione GPS e Sistemi di Coordinate Locali:
Un ricevitore GPS fornisce posizioni in coordinate geografiche (φ, λ, h) riferite al datum WGS84. Per applicazioni pratiche (ingegneria, topografia, GIS), queste devono essere convertite in coordinate cartografiche locali.
Il flusso di lavoro tipico è:

Acquisizione GPS: (φ_WGS84, λ_WGS84, h_WGS84)
Trasformazione datum (se necessario):
Se il sistema locale usa datum diverso (es. ED50), applicare trasformazione di Helmert.

Proiezione cartografica:
Applicare la proiezione standard della regione (Lambert, UTM, ecc.): (φ, λ) → (E, N)
dove E è l'easting e N il northing.

Correzione altimetrica:
Convertire altezza ellissoidica h in quota ortometrica H usando modello geoidale:
H = h - N_geoide
dove N_geoide è l'ondulazione del geoide (separazione tra geoide e ellissoide).

Modelli geoidali globali:
Il geoide è la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio approssima il livello medio del mare. La sua separazione dall'ellissoide di riferimento varia da circa -100 m a +100 m globalmente.
Modelli standard:

EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008): Sviluppo sferico-armonico fino a grado 2190, risoluzione effettiva circa 5 km.

EIGEN-6C4: Modello gravitazionale combinato da dati satellitari GRACE, GOCE e terrestri.

L'ondulazione geoidale è espressa come serie di armoniche sferiche:

$N(\varphi, \lambda) = (GM/\gamma) \Sigma_{n=2}^{\infty} (a/r)^{n+1} \Sigma_{m=0}^{n} P_{nm}(\sin \varphi) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)]$

dove P_{nm} sono polinomi di Legendre associati normalizzati, C_{nm} e S_{nm} sono coefficienti gravitazionali, γ è la gravità normale, e GM è la costante gravitazionale geocentrica.
Per EGM2008, con n_max = 2190, ci sono oltre 4,6 milioni di coefficienti. Il calcolo efficiente richiede algoritmi ottimizzati con ricorsioni stabilizzate per i polinomi di Legendre.

Navigazione inerziale e integrazione Kalman:
Sistemi di navigazione avanzati integrano GPS con misure inerziali (accelerometri, giroscopi) mediante filtri di Kalman. La rappresentazione delle coordinate in questi sistemi richiede attenzione particolare.
Lo stato del sistema include posizione, velocità e orientazione. Per la posizione, si può usare:

Coordinate geodetiche (φ, λ, h): Naturali per integrazione GPS, ma con singolarità ai poli.
Coordinate ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed): (X, Y, Z) cartesiane geocentriche, senza singolarità ma meno intuitive.
Coordinate ENU locali (East-North-Up): Sistema tangente locale, ottimale per piccole regioni.

La trasformazione tra questi sistemi e la propagazione delle incertezze attraverso le trasformazioni richiede calcolo delle matrici jacobiane:

$J = \partial(x_{out})/\partial(x_{in})$

La matrice di covarianza si trasforma come:

$\Sigma_{out} = J \Sigma_{in} J^T$

Esempio: Jacobiana geografica → cartesiana ECEF
Derivando $X = [N(\varphi) + h] \cos(\varphi) \cos(\lambda)$ rispetto a (φ, λ, h):

$\partial X/\partial \varphi = -[N(\varphi) + h] \sin(\varphi) \cos(\lambda) + [\partial N/\partial \varphi] \cos(\varphi) \cos(\lambda)$

$\partial X/\partial \lambda = -[N(\varphi) + h] \cos(\varphi) \sin(\lambda)$
$\partial X/\partial h = \cos(\varphi) \cos(\lambda)$

e analogamente per Y e Z. La matrice jacobiana completa 3×3 permette propagazione accurata delle incertezze.

Capitolo XXI: Considerazioni computazionali: parallelizzazione e GPU

Le moderne applicazioni GIS devono processare miliardi di punti. La parallelizzazione è essenziale.
Parallelizzazione CPU:
Le trasformazioni cartografiche sono "embarrassingly parallel": ogni punto può essere trasformato indipendentemente. Su architetture multi-core:

```
#pragma omp parallel for
for (i = 0; i < n_points; i++) {
   transform_point(lat[i], lon[i], &x[i], &y[i]);
}
```

Con OpenMP, si ottiene speedup quasi lineare fino a decine di core.
Implementazione GPU (CUDA/OpenCL):
Per dataset massivi, implementazioni GPU offrono accelerazioni di 100-1000×. Esempio kernel CUDA:

```
cuda__global__ void lambert_transform(
   double *lat, double *lon,
   double *x, double *y,
   int n,
   LambertParams params)
{
   int idx = blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x;
   if (idx < n) {
      double phi = lat[idx] * DEG_TO_RAD;
      double lambda = lon[idx] * DEG_TO_RAD;

      // Calcola latitudine isometrica
      double q = atanh(sin(phi)) -
            params.e * atanh(params.e * sin(phi));

      // Calcola raggio
      double rho = params.a * params.F * exp(-params.n * q);
```

```
        // Coordinate cartesiane
        double theta = params.n * (lambda - params.lambda0);
        x[idx] = params.x0 + rho * sin(theta);
        y[idx] = params.y0 + params.rho0 - rho * cos(theta);
    }
}
```

Lanciato con migliaia di thread paralleli, questo può trasformare decine di milioni di punti al secondo su GPU moderne.

Considerazioni di memoria:
Per dataset che non entrano in RAM, si usano strategie out-of-core:

Streaming: Processare dati in chunk sequenziali
Tiling spaziale: Suddividere regione in tile, processare tile indipendentemente
Database spaziali: PostGIS, SpatiaLite con indici spaziali R-tree per query efficienti.

Capitolo XXII: Teoria delle funzioni ellittiche e integrali ellittici nelle proiezioni

La trattazione rigorosa delle proiezioni su ellissoidi richiede la teoria delle funzioni ellittiche, sviluppata da Legendre, Abel e Jacobi nel diciannovesimo secolo.

Integrali ellittici di prima e seconda specie:
L'integrale ellittico incompleto di prima specie è definito come:

$$F(\varphi, k) = \int_{0}^{\varphi} d\theta / \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}$$

dove k è il modulo ellittico, $0 \le k < 1$.
L'integrale ellittico incompleto di seconda specie è:

$$E(\varphi, k) = \int_{0}^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}\, d\theta$$

Questi integrali non sono esprimibili in termini di funzioni elementari ma possono essere calcolati efficientemente mediante espansioni in serie o metodi numerici come il metodo AGM (media aritmetico-geometrica).

Relazione con le proiezioni ellissoidali:
La lunghezza dell'arco meridiano dall'equatore alla latitudine φ su un ellissoide è espressa mediante un integrale ellittico:

$s(\varphi) = \int_{0}^{\varphi} M(\varphi')\, d\varphi' = a(1 - e^2) \int_{0}^{\varphi} d\varphi' / [1 - e^2 \sin^2(\varphi')]^{3/2}$

Questo integrale può essere espresso in termini di $F(\varphi, e)$ usando sostituzioni appropriate.
Per applicazioni numeriche, si usa l'espansione in serie:

$$s(\varphi) = a \cdot [(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256)\, \varphi - (3e^2/8 + 3e^4/32 + 45e^6/1024) \sin(2\varphi) + (15e^4/256 + 45e^6/1024) \sin(4\varphi) - (35e^6/3072) \sin(6\varphi) + ...]$$

Per l'ellissoide WGS84, questa serie converge rapidamente e i primi quattro termini forniscono precisione superiore al millimetro per qualsiasi latitudine.

Funzioni ellittiche di Jacobi:
Le funzioni ellittiche di Jacobi $sn(u, k)$, $cn(u, k)$, $dn(u, k)$ sono le inverse degli integrali ellittici e soddisfano eleganti proprietà algebriche:

$$sn^2(u, k) + cn^2(u, k) = 1$$
$$dn^2(u, k) + k^2\, sn^2(u, k) = 1$$

Queste funzioni generalizzano le funzioni trigonometriche (che corrispondono al caso $k = 0$) e sono utilizzate in alcune formulazioni avanzate delle proiezioni conformi.

Proiezione conforme dell'ellissoide sulla sfera (Gauss):
Una costruzione teoricamente importante è la trasformazione conforme dell'ellissoide su una sfera ausiliaria di raggio R, seguita dalla proiezione conforme della sfera sul piano. Gauss dimostrò che tale trasformazione conforme esiste ed è unica (a meno di rotazioni).
La trasformazione è espressa implicitamente mediante funzioni ellittiche. La latitudine sferica χ (latitudine conforme) è relacionata alla latitudine geodetica φ mediante:

$$\chi = \varphi - (e^2/2 - 5e^4/24 + e^6/12 - 13e^8/360) \sin(2\varphi) + (7e^4/48 - 29e^6/240 + 811e^8/11520) \sin(4\varphi) - (7e^6/120 - 81e^8/1120) \sin(6\varphi) + (4279e^8/161280) \sin(8\varphi) + ...$$

Questa serie converge rapidamente per e piccolo (tipicamente $e \approx 0{,}08$ per la Terra).
Una volta trasformati sulla sfera conforme, si può applicare qualsiasi

proiezione sferica conforme (stereografica, Mercatore, ecc.), ottenendo automaticamente la corrispondente proiezione ellissoidale conforme.

Capitolo XXIII: Aspetti differenziali avanzati: curvatura geodetica e trasporto parallelo

Per analisi geodetiche sofisticate, è necessario considerare proprietà differenziali più profonde delle superfici.

Curvatura geodetica:
Data una curva γ(t) sulla superficie ellissoidale parametrizzata dall'ascissa curvilinea s, la curvatura geodetica κ_g misura quanto la curva devia dal seguire un percorso geodetico.
Per una curva su una sfera di raggio R, la curvatura geodetica di un parallelo di latitudine φ è:
$\kappa_g(\varphi) = \tan(\varphi) / R$
Questo quantifica la tendenza del parallelo a curvare rispetto al percorso geodetico diretto est-ovest. Solo l'equatore ($\varphi = 0$) ha $\kappa_g = 0$ ed è quindi un geodetico oltre che un parallelo.
Per l'ellissoide, la formula si complica:

$$\kappa_g(\varphi) = [\sin(\varphi) \cos(\varphi)] / [N(\varphi) \cdot [1 - e^2 \sin^2(\varphi)]]$$

Trasporto parallelo e olonomia:
Il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva chiusa sulla sfera generalmente non riporta il vettore alla sua orientazione originale. L'angolo di rotazione risultante (deficit di olonomia) è relacionato alla curvatura gaussiana dalla formula di Gauss-Bonnet:

$$\Delta\theta = \iint_A K \, dA$$

dove A è l'area racchiusa dalla curva chiusa e K è la curvatura gaussiana.
Per una sfera di raggio R, $K = 1/R^2$ costante, quindi:

$$\Delta\theta = A/R^2$$

Per un triangolo sferico con vertici P_1, P_2, P_3 e angoli interni α_1, α_2, α_3, l'area è relazionata agli angoli dalla formula:

$$A = R^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi)$$

Questo mostra che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico

eccede π, con l'eccesso proporzionale all'area. Questo eccesso sferico è critico in geodesia per triangolazioni su grandi distanze.

Equazioni geodetiche:
Le geodetiche su una superficie sono curve che localmente minimizzano la distanza. Soddisfano le equazioni differenziali del secondo ordine di Eulero-Lagrange:

$d^2x^i/ds^2 + \Gamma^i_{jk} (dx^j/ds)(dx^k/ds) = 0$

dove Γ^i_{jk} sono i simboli di Christoffel, relacionati alle derivate del tensore metrico:

$\Gamma^i_{jk} = (1/2)\, g^{il} [\partial g_{lj}/\partial x^k + \partial g_{lk}/\partial x^j - \partial g_{jk}/\partial x^l]$

Per l'ellissoide con coordinate geodetiche (φ, λ), i simboli di Christoffel non nulli includono:

$\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = [M'(\varphi)]/M(\varphi)$
$\Gamma^\varphi_{\lambda\lambda} = -[N(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\varphi)]/M(\varphi)$
$\Gamma^\lambda_{\varphi\lambda} = \Gamma^\lambda_{\lambda\varphi} = \tan(\varphi)/[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]$
dove $M'(\varphi) = dM/d\varphi$.

Problema geodetico diretto e inverso:
Il problema geodetico diretto consiste nel determinare le coordinate (φ_2, λ_2) e l'azimut finale α_2 dato un punto iniziale (φ_1, λ_1), azimut iniziale α_1, e distanza s lungo la geodetica.
Il problema inverso determina la distanza geodetica s e gli azimut α_1, α_2 dati due punti (φ_1, λ_1) e (φ_2, λ_2).
Per l'ellissoide, questi problemi non hanno soluzione chiusa e richiedono metodi iterativi. L'algoritmo di Vincenty, sviluppato nel 1975, è lo standard per precisione millimetrica:
Algoritmo di Vincenty (problema inverso):

Input: (φ_1, λ_1), (φ_2, λ_2)

Step 1: Calcolare latitudini ridotte
$U_1 = \arctan[(1-f) \tan(\varphi_1)]$
$U_2 = \arctan[(1-f) \tan(\varphi_2)]$

Step 2: Iterare per determinare λ sulla sfera ausiliaria
$L = \lambda_2 - \lambda_1$

λ_iniziale = L

Ripeti fino a convergenza:
sin(σ) = √{[cos(U_2) sin(λ)]² + [cos(U_1) sin(U_2) - sin(U_1) cos(U_2) cos(λ)]²}
cos(σ) = sin(U_1) sin(U_2) + cos(U_1) cos(U_2) cos(λ)
σ = arctan2[sin(σ), cos(σ)]
sin(α) = [cos(U_1) cos(U_2) sin(λ)] / sin(σ)
cos(2σ_m) = cos(σ) - [2 sin(U_1) sin(U_2)] / cos²(α)
C = [f/16] cos²(α) [4 + f(4 - 3cos²(α))]
λ_nuovo = L + (1-C) f sin(α) {σ + C sin(σ) [cos(2σ_m) + C cos(σ) (-1 + 2cos²(2σ_m))]}

Se |λ_nuovo - λ| < ε: convergenza
λ = λ_nuovo

Step 3: Calcolare distanza e azimut
u² = cos²(α) [(a² - b²)/b²]
A = 1 + [u²/16384] {4096 + u² [-768 + u² (320 - 175u²)]}
B = [u²/1024] {256 + u² [-128 + u² (74 - 47u²)]}
Δσ = B sin(σ) {cos(2σ_m) + [B/4] [cos(σ)(-1 + 2cos²(2σ_m))
- [B/6] cos(2σ_m) (-3 + 4sin²(σ))(-3 + 4cos²(2σ_m))]}
s = b A (σ - Δσ)
$α_1$ = arctan2[cos(U_2) sin(λ), cos(U_1) sin(U_2) - sin(U_1) cos(U_2) cos(λ)]
$α_2$ = arctan2[cos(U_1) sin(λ), -sin(U_1) cos(U_2) + cos(U_1) sin(U_2) cos(λ)]

Questo algoritmo fornisce una precisione di circa 0,5 mm per distanze fino a 20.000 km sull'ellissoide WGS84.

Capitolo XXIV: Proiezioni conformi generalizzate: la teoria di Riemann

La teoria delle funzioni complesse di una variabile fornisce il framework matematico più potente per comprendere le proiezioni conformi.

Teorema di Riemann sulla mappatura conforme:
Il teorema di Riemann afferma che per qualsiasi regione semplicemente connessa D nel piano complesso (diversa dal piano complesso intero), esiste una funzione olomorfa f che mappa biettivamente e conformemente D sul disco unitario.
Applicato alla cartografia: qualsiasi regione semplicemente connessa sulla sfera può essere mappata conformemente su qualsiasi altra regione semplicemente connessa nel piano. Questa universalità teorica contrasta con l'impossibilità di mappare conformemente l'intera sfera sul piano (che

richiederebbe mappare una regione compatta in una non compatta).

Funzione di Schwarz-Christoffel:
Per domini poligonali, la trasformazione di Schwarz-Christoffel fornisce una formula esplicita (sebbene contenente integrali) per la mappatura conforme.
Data un poligono nel piano w con vertici w_1, w_2, ..., w_n e angoli esterni $\beta_1\pi$, $\beta_2\pi$, ..., $\beta_n\pi$, la mappatura conforme dal semipiano superiore z al poligono è:

$$w(z) = A + B \int \prod_{k=1}^{n} (\zeta - x_k)^{(-\beta_k)} d\zeta$$

dove x_1, x_2, ..., x_n sono i preimmagini dei vertici sull'asse reale, e A, B sono costanti.
Questa costruzione è stata utilizzata per sviluppare proiezioni conformi ottimizzate per regioni specifiche di forma approssimativamente poligonale (ad esempio, stati con confini rettilinei).

Serie di Laurent e teorema dei residui:
La rappresentazione di una funzione olomorfa mediante serie di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

fornisce uno strumento potente per analizzare il comportamento locale delle proiezioni conformi vicino a singolarità.
Per la proiezione stereografica dalla sfera al piano, pensata come trasformazione w = f(z) dove z e w sono coordinate complesse, la singolarità al polo ha un residuo che determina la distorsione locale.

Mappature quasi-conformi:
Una generalizzazione delle mappature conformi sono le mappature quasi-conformi, che permettono una dilatazione limitata ma non necessariamente unitaria. Una mappatura è K-quasi-conforme se il rapporto tra i fattori di scala principale soddisfa:

$$k_1(z) / k_2(z) \leq K$$

per qualche costante $K \geq 1$. Per K = 1 si recuperano le mappature conformi.
Le mappature quasi-conformi sono utilizzate in algoritmi di ottimizzazione di proiezioni dove si cerca di minimizzare la deviazione dalla conformità sotto vincoli aggiuntivi (ad esempio, preservazione approssimata delle aree entro una certa tolleranza).

Capitolo XXV: Aspetti topologici: genere, caratteristica di Eulero e costruzioni

La topologia algebrica fornisce vincoli fondamentali sulle possibili proiezioni.
Caratteristica di Eulero:
Per una superficie triangolata con V vertici, E spigoli e F facce, la caratteristica di Eulero è:

$$\chi = V - E + F$$

Per la sfera, $\chi = 2$. Per un toro, $\chi = 0$. Per una superficie di genere g (con g "buchi"), $\chi = 2 - 2g$.
La caratteristica di Eulero è un invariante topologico: non cambia sotto deformazioni continue (omeomorfismi). Questo impone che qualsiasi mappatura della sfera sul piano deve necessariamente avere singolarità (punti dove la mappatura non è localmente omeomorfa).

Teorema della palla pelosa:
Un risultato classico di topologia algebrica afferma che non esiste un campo vettoriale tangente continuo e ovunque non nullo sulla sfera. Cartograficamente, questo implica che non può esistere una proiezione che preservi ovunque una direzione privilegiata (ad esempio, il nord) senza discontinuità.
Indice di un campo vettoriale:
Data una mappatura $f: S^2 \to R^2$ e considerando il campo vettoriale dei meridiani sulla sfera, la sua immagine sotto f definisce un campo vettoriale sul piano. L'indice totale di questo campo (somma degli indici ai punti singolari) deve essere uguale alla caratteristica di Eulero della sfera, $\chi = 2$.
Questo spiega perché le proiezioni azimutali hanno necessariamente un punto singolare (il punto opposto al centro della proiezione, mappato all'infinito, con indice +2), mentre proiezioni cilindriche hanno due punti singolari ai poli (ciascuno con indice +1).

Capitolo XXVI: Calcolo delle variazioni e proiezioni di minima energia

Il calcolo delle variazioni fornisce metodi per derivare proiezioni che minimizzano funzionali integrali di distorsione.
Funzionale energetico di Dirichlet:
Per una mappatura $f: \Omega \to R^2$ da un dominio Ω sulla sfera al piano, l'energia di Dirichlet è:

$$E[f] = \iint_\Omega ||\nabla f||^2 \, dA = \iint_\Omega (|\partial f/\partial u|^2 + |\partial f/\partial v|^2) \, dA$$

dove (u,v) sono coordinate locali su Ω.
Minimizzare E[f] soggetto a condizioni al contorno appropriate conduce alle equazioni di Laplace:

$$\nabla^2 f = 0$$

Una mappatura che soddisfa questa equazione è detta armonica. Le mappature armoniche minimizzano localmente l'energia di stretching.

Teorema di Rado-Kneser-Choquet:
Una mappatura armonica tra dischi è un diffeomorfismo (biettiva, liscia con inversa liscia) se e solo se è un omeomorfismo sul bordo. Questo fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza di proiezioni armoniche ben definite.

Flusso armonico:
Per trovare numericamente la mappatura armonica, si può utilizzare un processo di flusso:

$$\partial f/\partial t = \nabla^2 f$$

partendo da una mappatura iniziale f_0 e facendo evolvere nel tempo t fino a convergenza. Questo è implementabile mediante schemi alle differenze finite o elementi finiti.

Applicazione: Proiezioni per domini irregolari:
Per una regione geografica di forma arbitraria (ad esempio, un paese con confine irregolare), si può derivare una proiezione ottimale come soluzione del problema:

$$\min E[f]$$

soggetto a: f mappa il bordo di Ω in un rettangolo specificato
La soluzione è la mappatura armonica, calcolabile numericamente. Questa proiezione minimizza la distorsione totale in senso L^2 ed è particolarmente utile per atlanti nazionali dove si desidera una rappresentazione ottimizzata per il territorio specifico.

Capitolo XXVII: Proiezioni discrete e cartografia computazionale

Con l'avvento della geometria computazionale, sono emerse formulazioni discrete delle proiezioni cartografiche.

Mappature di mesh triangolari:
Rappresentando la superficie terrestre come mesh triangolare con V vertici, la proiezione diventa una mappatura dei vertici:

$f: \{v_1, v_2, ..., v_V\} \subset S^2 \rightarrow \{p_1, p_2, ..., p_V\} \subset R^2$

L'energia discreta di Dirichlet è:

$E_discrete = \Sigma_triangoli\ A_t \cdot ||\nabla_t\ f||^2$

dove A_t è l'area del triangolo t e $\nabla_t\ f$ è il gradiente discreto su quel triangolo.

Coordinate baricentriche e interpolazione:
All'interno di ogni triangolo, le coordinate di un punto sono interpolate baricentriche usando le coordinate dei vertici:

$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$

dove $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ e $\alpha_i \geq 0$ sono le coordinate baricentriche.
Questa interpolazione lineare preserva automaticamente la planarità all'interno dei triangoli ma può introdurre discontinuità nelle derivate ai bordi dei triangoli.

Parametrizzazione conforme discreta:
Per ottenere una parametrizzazione discreta che approssimi la conformità, si cerca di minimizzare l'energia di Dirichlet soggetta a vincoli discreti che approssimano la condizione di Cauchy-Riemann.
Un approccio efficace usa il metodo LSCM (Least Squares Conformal Maps):

$\min \Sigma_triangoli\ A_t \cdot ||J_t - \lambda_t\ R_t||^2_F$

dove J_t è lo jacobiano della mappatura sul triangolo t, R_t è una matrice di rotazione, λ_t è un fattore di scala, e $||\cdot||_F$ è la norma di Frobenius.
Questo problema è riducibile a un sistema lineare sparso di grandi dimensioni, risolvibile efficientemente con metodi iterativi come gradiente coniugato.

Capitolo XXVIII: Incertezza e propagazione degli errori nelle trasformazioni

Ogni misurazione geodetica comporta incertezza. La propagazione di queste incertezze attraverso le trasformazioni cartografiche è cruciale per applicazioni di alta precisione.

Matrice di covarianza:
L'incertezza nella posizione è rappresentata da una matrice di covarianza 2×2 (in 2D) o 3×3 (in 3D):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma^2_y \end{bmatrix}$$

Gli elementi diagonali σ^2_x, σ^2_y sono le varianze nelle direzioni x e y. L'elemento fuori diagonale σ_{xy} è la covarianza, che cattura correlazioni tra gli errori.
Gli autovalori di Σ determinano i semiassi dell'ellisse di confidenza. Per un livello di confidenza del 95%, l'ellisse ha semiassi:

$$a = \sqrt{(\lambda_1 \cdot \chi^2_{2,0.95})} \approx 2{,}448\sqrt{\lambda_1}$$
$$b = \sqrt{(\lambda_2 \cdot \chi^2_{2,0.95})} \approx 2{,}448\sqrt{\lambda_2}$$

dove λ_1, λ_2 sono gli autovalori di Σ e $\chi^2_{2,0.95} \approx 5{,}991$.

Legge di propagazione della covarianza:
Data una trasformazione y = f(x) e la matrice jacobiana J = ∂f/∂x, la covarianza trasformata è:

$$\Sigma_y = J \Sigma_x J^T$$

Esempio: Propagazione geografiche → Lambert:
Supponiamo di avere una posizione (φ, λ) con incertezza:

$$\Sigma_{geo} = \begin{bmatrix} \sigma^2_\varphi & 0 \\ 0 & \sigma^2_\lambda \end{bmatrix}$$

(assumendo errori non correlati in latitudine e longitudine).
La trasformazione Lambert (φ, λ) → (E, N) ha jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \partial E/\partial\varphi & \partial E/\partial\lambda \\ \partial N/\partial\varphi & \partial N/\partial\lambda \end{bmatrix}$$

con elementi:
$\partial E/\partial\varphi = n\,\rho' \sin(\theta)$
$\partial E/\partial\lambda = n^2\,\rho \cos(\theta)$
$\partial N/\partial\varphi = \rho' \cos(\theta)$
$\partial N/\partial\lambda = n^2\,\rho \sin(\theta)$

dove $\rho' = d\rho/d\varphi = -n\,\rho / [(1-e^2)^{(1/2)} \cos(\varphi)]$ e $\theta = n(\lambda - \lambda_0)$.

La matrice di covarianza nelle coordinate cartografiche è:

Σ_cart = J Σ_geo J^T

che generalmente produce una ellisse di confidenza ruotata e deformata rispetto all'ellisse originale nelle coordinate geografiche.

Analisi di sensibilità:
Per valutare l'impatto di errori nei parametri della proiezione (ad esempio, errori nei paralleli standard o nel meridiano centrale), si calcola:

∂(E,N)/∂p_i

dove p_i sono i parametri della proiezione. Questo quantifica quanto sensibile è la posizione cartografica finale a errori nella definizione della proiezione stessa.

Capitolo XXIX: Standardizzazione internazionale: EPSG, ISO e OGC

La proliferazione di sistemi di coordinate ha reso necessaria una standardizzazione rigorosa.

Database EPSG:
Il database EPSG (European Petroleum Survey Group, ora mantenuto dall'IOGP) è il registro de facto di sistemi di riferimento coordinate. Ogni sistema è identificato da un codice numerico univoco:

EPSG:4326 = WGS84 geografiche (φ, λ)
EPSG:3857 = Web Mercator
EPSG:2154 = Lambert-93 (Francia)
EPSG:32633 = UTM zona 33N, WGS84
EPSG:4258 = ETRS89 geografiche (Europa)

Ogni codice EPSG specifica completamente:

Datum geodetico (ellissoide, orientazione, origine)
Proiezione cartografica e suoi parametri
Unità di misura
Estensione geografica di validità
Accuratezza prevista

Well-Known Text (WKT):

Lo standard OGC Well-Known Text fornisce una rappresentazione testuale dei sistemi di coordinate:La conversione geografiche ↔ geocentriche utilizza:
Geografiche → Geocentriche:

$X = [N(\varphi) + h] \cos(\varphi) \cos(\lambda)$
$Y = [N(\varphi) + h] \cos(\varphi) \sin(\lambda)$
$Z = [N(\varphi)(1 - e^2) + h] \sin(\varphi)$

dove h è l'altezza ellissoidica sopra l'ellissoide.

Geocentriche → Geografiche (metodo iterativo di Bowring):
Il problema inverso non ha soluzione chiusa e richiede iterazione. Un algoritmo efficiente è:

$p = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$
$\theta = \arctan[Z \cdot a / (p \cdot b)]$
$\varphi = \arctan\{[Z + e'^2 b \sin^3(\theta)] / [p - e^2 a \cos^3(\theta)]\}$
$\lambda = \arctan2(Y, X)$
$h = p/\cos(\varphi) - N(\varphi)$

dove $e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$ è l'eccentricità seconda al quadrato.

Standard ISO 19111:
Lo standard internazionale ISO 19111 "Geographic information — Spatial referencing by coordinates" definisce formalmente:
Coordinate Reference System (CRS): Sistema completo che specifica come le coordinate si relacionano a posizioni sulla Terra.

Coordinate Operation: Trasformazione tra CRS diversi, classificata in:

Conversione: Trasformazione matematica esatta (es. proiezione cartografica)
Trasformazione: Trasformazione empirica con accuratezza limitata (es. cambio datum)
Compound CRS: Combinazione di CRS 2D orizzontale con CRS 1D verticale (es. Lambert + altezza ortometrica).

Capitolo XXX: Applicazioni specializzate: geodesia spaziale e interferometria

Le moderne tecniche geodetiche spaziali richiedono precisione estrema nelle trasformazioni di coordinate.

VLBI (Very Long Baseline Interferometry):

La VLBI misura ritardi temporali nell'arrivo di segnali radio da quasar extragalattici a coppie di radiotelescopi separati da migliaia di chilometri. La precisione raggiunge pochi millimetri nella determinazione delle baseline.
Le coordinate VLBI sono naturalmente espresse nel sistema di riferimento celestiale internazionale (ICRS), che è inerziale. La trasformazione al sistema terrestre (ITRS) richiede:

Precessione: Movimento del polo celeste rispetto alle stelle fisse (~50'' per anno)
Nutazione: Oscillazione periodica del polo (~9'' ampiezza, periodo 18,6 anni)
Rotazione terrestre: Conversione da sistema inerziale a rotante con la Terra
Moto del polo: Variazione della posizione dell'asse di rotazione nel corpo terrestre (~10 m ampiezza)

La trasformazione completa è:

$$r_{ITRS} = W(t) \cdot R(t) \cdot Q(t) \cdot r_{ICRS}$$

dove:
Q(t) è la matrice di precessione-nutazione
R(t) è la matrice di rotazione siderale della Terra
W(t) è la matrice di moto polare
Ogni matrice è funzione del tempo con parametri determinati da osservazioni astrogeodetiche continue. L'IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) pubblica quotidianamente i parametri aggiornati.

InSAR (Interferometric Synthetic Aperture Radar):
L'InSAR misura deformazioni della superficie terrestre con precisione millimetrica confrontando fasi di onde radar acquisite in tempi diversi. Le osservazioni sono nella geometria slant-range del satellite.
La trasformazione da coordinate slant-range (distanza satellite-punto, angolo off-nadir) a coordinate geodetiche richiede:

Determinazione precisa dell'orbita satellitare (precisione decimetrica)
Modello digitale del terreno (DEM) per risolvere l'ambiguità range-Doppler
Correzioni atmosferiche (ritardo troposferico e ionosferico)
Proiezione delle misure line-of-sight in componenti verticali e orizzontali

Le velocità di deformazione misurate da InSAR sono tipicamente proiettate in coordinate UTM o Lambert per la regione di interesse, con particolare attenzione alla propagazione delle incertezze attraverso la geometria non lineare di acquisizione.

Capitolo XXXI: Proiezioni per visualizzazione scientifica Multi-Scala

Applicazioni scientifiche moderne richiedono visualizzazioni che si adattano dinamicamente alla scala di osservazione.

Hierarchical triangular mesh (HTM):
HTM suddivide la sfera in un'ottaedro iniziale (8 triangoli), poi ricorsivamente suddivide ogni triangolo in 4 triangoli figli. Al livello k, ci sono 8·4^k triangoli.
Ogni triangolo è identificato da una stringa gerarchica che codifica il percorso nell'albero quaternario. Esempio:

Livello 0: triangoli N0, N1, N2, N3, S0, S1, S2, S3 (emisferi nord e sud)
Livello 1: N0 si suddivide in N00, N01, N02, N03
Livello k: stringhe di lunghezza k+1

Questa struttura supporta query spaziali efficienti: trovare tutti i triangoli che intersecano una regione richiede tempo O(log n + m) dove m è il numero di triangoli risultanti.

Adaptive refinement:
Per simulazioni numeriche su sfera (modelli climatici, simulazioni geofisiche), si usa raffinamento adattivo: alta risoluzione dove necessario, bassa altrove.
Criteri di raffinamento includono:

Gradiente della soluzione (raffina dove variano rapidamente temperatura, pressione, ecc.)
Feature geometriche (costa, montagne)
Errore stimato a posteriori
Un algoritmo tipico:

```
while (errore_globale > tolleranza) {
   per ogni elemento e {
      calcola indicatore_errore(e)
      if (indicatore_errore(e) > soglia_raffinamento) {
         suddividi(e)
      }
   }
   risolvi_sistema()
   aggiorna_errore_globale()
}
```

La sfida è mantenere la regolarità della mesh durante il raffinamento per

evitare elementi troppo distorti che degradano l'accuratezza numerica.

Capitolo XXXII: Proiezioni artistiche e cartografia non-convenzionale

Oltre alle proiezioni scientifiche rigorose, esistono proiezioni artistiche che privilegiano l'impatto visivo o comunicazioni concettuali.

Proiezione di Dymaxion (Fuller):
Buckminster Fuller progettò negli anni '40 una proiezione che mappa la sfera su un icosaedro, poi sviluppa l'icosaedro sul piano. Il risultato è una mappa con:

Continenti relativamente poco distorti
Nessuna direzione privilegiata ("up")
Possibilità di riconfigurazione in arrangiamenti diversi

Matematicamente, la proiezione Fuller utilizza una proiezione gnomica modificata da ogni faccia triangolare dell'icosaedro alla sfera. La calibrazione dei parametri fu fatta empiricamente da Fuller per minimizzare visualmente le distorsioni sui continenti.

Proiezione di Cahill-Keyes:
Questa proiezione octaedrale (1975) mappa la sfera su un ottaedro, sviluppato in una forma a "fiore" con otto petali triangolari. Combina:

Conformità approssimata
Equilibrio visivo
Simmetria estetica

Cartogrammi:
I cartogrammi distorcono deliberatamente la geografia per rappresentare variabili statistiche. In un cartogramma di popolazione, l'area di ciascuna regione è proporzionale alla sua popolazione, non alla sua area geografica reale.
L'algoritmo di Gastner-Newman (2004) genera cartogrammi risolvendo una equazione di diffusione:

$$\partial \rho / \partial t = \nabla \cdot [\rho \nabla \Phi]$$

dove $\rho(x,y,t)$ è la densità spaziale della variabile e Φ è un potenziale. Partendo dalla geografia reale, si evolve il sistema finché la densità diventa uniforme, con le distorsioni geometriche risultanti che riflettono la distribuzione

originale della variabile.

Capitolo XXXIII: Futuro delle proiezioni: Machine Learning e ottimizzazione automatica

L'intelligenza artificiale sta aprendo nuove possibilità per generazione automatica di proiezioni ottimali.

Neural network per apprendimento di proiezioni:
Una rete neurale può apprendere una proiezione ottimale da esempi. Architettura tipica:

Input: coordinate geografiche (φ, λ)
Hidden layers: 3-5 strati fully-connected con attivazioni ReLU o tanh
Output: coordinate cartesiane (x, y)
Funzione di loss:

$L = w_1 L_conformità + w_2 L_equivalenza + w_3 L_smoothness + w_4 L_boundary$

dove:
L_conformità penalizza deviazioni dagli angoli
L_equivalenza penalizza deviazioni dalle aree
L_smoothness penalizza derivate seconde grandi (irregolarità)
L_boundary impone vincoli sul contorno del dominio
Training su dataset di punti con pesi w_i ottimizzati per la specifica applicazione.
Reinforcement learning per proiezioni adaptive:
Un agente RL può apprendere a selezionare dinamicamente parametri di proiezione in funzione del contesto:
Stato s: regione geografica, scala, scopo della mappa
Azione a: scelta di proiezione e suoi parametri
Reward r: negativo della distorsione media ponderata
Politica π(a|s) appresa mediante Q-learning, policy gradient, o actor-critic.
Ottimizzazione evolutiva multi-obiettivo:
Algoritmi genetici possono esplorare lo spazio di possibili proiezioni parametriche ottimizzando simultaneamente obiettivi multipli:
Obiettivi:

Minimizzare distorsione angolare media
Minimizzare distorsione areale media
Massimizzare distorsione angolare minima (evitare peggiori casi)
Minimizzare complessità computazionale

Il risultato è un fronte di Pareto di soluzioni non dominate, tra le quali il cartografo può scegliere in base alle priorità specifiche.

Capitolo XXXIV: Conclusioni e prospettive

Il percorso dalle eleganti costruzioni geometriche di Lambert del diciottesimo secolo alle moderne implementazioni computazionali rappresenta uno degli sviluppi più affascinanti della matematica applicata. La proiezione conica conforme di Lambert, con la sua solida fondazione nella teoria delle funzioni complesse e nella geometria differenziale, continua a essere uno strumento indispensabile per la cartografia di precisione oltre due secoli e mezzo dopo la sua concezione originale.

Sintesi delle conquiste teoriche:
L'analisi completa sviluppata in questo trattato ha mostrato come la proiezione di Lambert emerga naturalmente dalla richiesta di preservare la conformità locale, conducendo inevitabilmente all'introduzione della latitudine isometrica $q(\varphi)$ come coordinata fondamentale. La generalizzazione dall'approssimazione sferica all'ellissoide di riferimento realistico, attraverso l'incorporazione dell'eccentricità e nelle formule mediante integrali ellittici e sviluppi in serie, rappresenta un trionfo della matematica analitica del diciannovesimo secolo, consolidato dalle implementazioni numeriche robuste del ventesimo.
La costante del cono n, determinata dai paralleli standard attraverso la relazione:

$$n = \ln[N(\varphi_1)\cos(\varphi_1)/N(\varphi_2)\cos(\varphi_2)] / [q(\varphi_1) - q(\varphi_2)]$$

codifica in una singola quantità la geometria essenziale della proiezione, interpolando continuamente tra i casi limite della proiezione cilindrica di Mercatore ($n \to 0$) e della proiezione stereografica polare ($n \to 1$). Questa unità concettuale della famiglia di proiezioni conformi fu uno degli insight più profondi di Lambert.

Implementazioni moderne e precisione:
Le implementazioni contemporanee, ottimizzate per ellissoidi di riferimento ad alta precisione come WGS84, raggiungono accuratezze submillimetriche attraverso:

Calcolo accurato della latitudine isometrica mediante formule stabilizzate numericamente che evitano cancellazione catastrofica e overflow/underflow anche per latitudini polari estreme.

Inversione iterativa mediante il metodo di Newton-Raphson con convergenza quadratica, tipicamente raggiungendo precisione di macchina in 3-4 iterazioni anche per punti distanti migliaia di chilometri dal centro della proiezione.
Gestione rigorosa di casi speciali e condizioni al contorno, includendo trattamento delle singolarità polari, gestione dell'avvolgimento longitudinale oltre ±180°, e verifica della validità del dominio di definizione.
Parallelizzazione massiva su architetture GPU per processare miliardi di punti al secondo, essenziale per applicazioni GIS moderne che manipolano dataset globali ad alta risoluzione.

Bilanciamento delle distorsioni:
L'analisi quantitativa delle distorsioni ha rivelato che la scelta ottimale dei paralleli standard per una regione geografica specifica richiede la soluzione di un problema di ottimizzazione vincolata. La regola di Tissot, che posiziona i paralleli standard a circa un sesto dell'estensione latitudinale dai bordi nord e sud della regione, emerge come approssimazione di primo ordine che bilancia le distorsioni areali massime tra i paralleli standard (dove k < 1 e le aree sono compresse) e esternamente ad essi (dove k > 1 e le aree sono espanse).
Per una regione che si estende da φ_min a φ_max, la configurazione ottimale rigorosa minimizza il funzionale:

$$F[\varphi_1, \varphi_2] = \int_{\varphi_min}^{\varphi_max} w(\varphi)[k(\varphi; \varphi_1, \varphi_2) - 1]^2 \cos(\varphi)\, d\varphi$$

dove w(φ) è una funzione peso che può enfatizzare regioni di particolare importanza (ad esempio, aree densamente popolate). Le equazioni di Euler-Lagrange per questo problema variazionale conducono a un sistema di equazioni trascendenti accoppiate per φ_1 e φ_2, risolvibili numericamente mediante metodi di shooting o collocation.

Integrazione con sistemi geodetici moderni:
L'interoperabilità tra diversi sistemi di riferimento geodetici rappresenta una sfida continua. La trasformazione rigorosa tra datum diversi richiede non solo la trasformazione di Helmert a sette parametri (tre traslazioni δx, δy, δz; tre rotazioni αx, αy, αz; un fattore di scala δs), ma anche la considerazione di deformazioni temporali dovute alla tettonica delle placche.
I moderni sistemi di riferimento come l'ITRF (International Terrestrial Reference Frame) incorporano esplicitamente le velocità dei punti fiduciali:

$$r(t) = r(t_0) + v(t - t_0)$$

dove v è il vettore velocità della stazione geodetica, tipicamente dell'ordine di

millimetri per anno. Per applicazioni che richiedono precisione centimetrica su periodi decennali, l'incorporazione di questi effetti dinamici diventa essenziale.
La combinazione di proiezione Lambert, trasformazione datum, e correzione per moto tettonico in un singolo pipeline di elaborazione richiede composizione attenta di trasformazioni, con propagazione rigorosa delle incertezze attraverso ogni stadio via:

$$\Sigma_{finale} = J_N \cdots J_2 J_1 \, \Sigma_{iniziale} \, J_1^T J_2^T \cdots J_N^T$$

dove J_i sono le matrici jacobiane di ciascuna trasformazione componente.

Verso proiezioni adattive e context-aware:
Le tendenze emergenti nella cartografia computazionale puntano verso sistemi di proiezione che si adattano dinamicamente al contenuto e al contesto di utilizzo. L'idea è di superare l'approccio tradizionale di selezione statica di una singola proiezione per un'intera mappa, permettendo invece variazioni continue dei parametri di proiezione in funzione della posizione, della scala di visualizzazione, e della natura dei dati rappresentati.
Un framework matematico per proiezioni adaptive definisce una famiglia parametrica di proiezioni:

$$f_p(\varphi, \lambda) = (x(\varphi, \lambda; p), y(\varphi, \lambda; p))$$

dove $p \in P$ è un vettore di parametri che varia smoothly nello spazio geografico e nella scala. La transizione tra configurazioni diverse deve soddisfare vincoli di continuità e differenziabilità per evitare artefatti visivi:

$$||f_p - f_q|| < \varepsilon \text{ quando } ||p - q|| < \delta$$

con norme appropriate definite sullo spazio delle funzioni.
L'ottimizzazione dei parametri p può essere formulata come problema di controllo ottimale:

$$\min_{p(\cdot)} \iint_\Omega L(\varphi, \lambda, k(\varphi,\lambda;p), \nabla k(\varphi,\lambda;p)) \, dA$$

soggetto a vincoli sulle derivate di p per garantire smoothness. Questo problema, altamente non lineare e infinite-dimensionale, richiede discretizzazione e tecniche di ottimizzazione avanzate come metodi adjoint o programmazione dinamica approssimata.

Machine learning e generazione automatica di proiezioni:
L'applicazione di tecniche di deep learning alla sintesi di proiezioni cartografiche è ancora in fase embrionale ma promette sviluppi rivoluzionari. Una rete neurale profonda può essere addestrata end-to-end per apprendere una mappatura ottimale direttamente da obiettivi specificati ad alto livello.
Architetture promettenti includono:

Conditional VAE (Variational Autoencoder): Apprende una distribuzione di proiezioni nello spazio latente, condizionata su requisiti specificati (conformità desiderata, regione geografica, scala). Campionando da questo spazio latente si generano nuove proiezioni con proprietà interpolate.
GAN (Generative Adversarial Network): Un generatore G produce proiezioni, un discriminatore D valuta la qualità. Training adversariale conduce G a produrre proiezioni che ottimizzano metriche di qualità implicitamente apprese dal discriminatore.
Physics-informed neural networks: Incorporano esplicitamente vincoli matematici (equazioni di Cauchy-Riemann per conformità, condizione di Jacobiano unitario per equivalenza) come termini di regolarizzazione nella loss function, garantendo che le proiezioni generate rispettino proprietà geometriche fondamentali.

La sfida principale è la generazione di training data sufficienti. Un approccio è la sintesi procedurale di proiezioni mediante perturbazioni controllate di proiezioni classiche, creando un dataset diversificato di esempi con proprietà note.

Visualizzazione immersiva e realtà virtuale:
L'avvento di dispositivi di realtà virtuale e aumentata introduce nuovi paradigmi per la visualizzazione cartografica. In un ambiente VR, l'utente può letteralmente "stare dentro" la proiezione, osservando la Terra da prospettive impossibili nella cartografia tradizionale.
Le proiezioni per VR devono soddisfare vincoli addizionali:

Continuità sotto movimento: Quando l'utente muove la testa, la proiezione deve aggiornarsi smoothly senza discontinuità percettibili.
Compensazione della distorsione prospettica: Il rendering 3D introduce naturalmente distorsioni prospettiche. La proiezione cartografica deve compensare per mantenere proprietà metriche desiderate.
Bassa latenza computazionale: Rendering VR richiede frame rate ≥ 90 fps. Le trasformazioni di proiezione devono essere computabili in < 1 ms per milioni di vertici.

Un approccio è il pre-calcolo di lookup tables (LUT) multidimensionali che interpolano i risultati della proiezione, riducendo il calcolo runtime a poche interpolazioni lineari. Per proiezioni complesse come Lambert, una LUT 3D parametrizzata da (φ, λ, parametri_proiezione) con risoluzione 1024^3 richiede ~8 GB di memoria ma permette evaluazioni in tempo costante O(1).

Cartografia planetaria e esplorazione spaziale:
Le missioni di esplorazione planetaria richiedono cartografia di precisione per corpi celesti diversi dalla Terra. La generalizzazione delle proiezioni di Lambert a:

Sferoidi altamente schiacciati: Satelliti come Mimas (schiacciamento ~0,03) richiedono termini di ordine superiore nell'eccentricità.
Ellissoidi triassiali: Asteroidi e satelliti irregolari non hanno simmetria rotazionale. La proiezione deve gestire variazione della curvatura con la longitudine.
Topografia estrema: Variazioni di rilievo dell'ordine del raggio medio (es. Vesta) richiedono proiezioni che considerano la forma tridimensionale completa, non solo l'ellissoide di riferimento.

Per corpi triassiali con semiassi a > b > c, le formule di Lambert si generalizzano introducendo dipendenza dalla longitudine nei raggi di curvatura:
$N(\varphi, \lambda) = abc / \sqrt{[bc \cos(\varphi)]^2 + a^2c^2 \sin^2(\varphi)\cos^2(\lambda) + a^2b^2 \sin^2(\varphi)\sin^2(\lambda)}$
$M(\varphi, \lambda) = N^3(\varphi, \lambda) / [a^2b^2c^2]$
La latitudine isometrica diventa quindi funzione anche della longitudine, complicando notevolmente le formule e richiedendo soluzioni numeriche complete anche per la trasformazione diretta.

Questioni aperte e direzioni di ricerca:
Nonostante due secoli e mezzo di sviluppo intensivo, la teoria delle proiezioni cartografiche presenta ancora questioni aperte e opportunità per ricerca fondamentale:

Caratterizzazione completa delle proiezioni Pareto-ottimali: Dato un insieme di obiettivi di distorsione multipli (conformità, equivalenza, equidistanza), qual è la frontiera di Pareto delle proiezioni ottimali non dominate? Esistono gap nella frontiera o è continua?
Limiti informativi teorici: Qual è il contenuto informativo minimo necessario per ricostruire una proiezione da un insieme finito di punti di controllo? Analogamente ai teoremi di campionamento in teoria dell'informazione, esistono limiti fondamentali sulla densità di campionamento richiesta?

Stabilità topologica: Come caratterizzare l'insieme di proiezioni che sono stabili sotto perturbazioni piccole dei dati o dei parametri? Questa è cruciale per robustness in presenza di errori.
Complessità computazionale: Qual è la complessità algoritmica ottimale per valutare una proiezione generale? Esistono trade-off fondamentali tra espressività (classe di proiezioni rappresentabili) e efficienza computazionale?
Geometria delle proiezioni come varietà: Lo spazio di tutte le proiezioni conformi (o equivalenti, o con date proprietà) forma una varietà differenziabile? Quali sono la sua dimensione, topologia, curvatura? Questa prospettiva geometrica potrebbe illuminare la struttura globale dello spazio delle proiezioni.

Eredità di Lambert:
Tornando alle origini, è notevole quanto l'approccio di Lambert sia rimasto attuale. Il suo insight fondamentale – che le proiezioni cartografiche dovrebbero essere derivate analiticamente a partire dalla specificazione esplicita delle proprietà matematiche desiderate, piuttosto che attraverso costruzioni geometriche ad hoc – ha stabilito il paradigma che guida ancora oggi la ricerca in cartografia matematica.
La latitudine isometrica, che Lambert introdusse come artificio computazionale per semplificare le equazioni della conformità, si è rivelata avere profonde connessioni con la struttura complessa della sfera, con le geodetiche come lossodromie nel piano isometrico, e con la teoria delle funzioni armoniche. Questi collegamenti non erano pienamente compresi neppure da Lambert stesso, ma sono emersi progressivamente attraverso due secoli di sviluppo matematico.

Considerazioni finali:
La proiezione conica conforme di Lambert rappresenta molto più di una tecnica cartografica: è un esempio paradigmatico di come la matematica pura – teoria delle funzioni complesse, geometria differenziale, calcolo delle variazioni – possa essere applicata con successo straordinario a problemi pratici di importanza globale. Ogni giorno, miliardi di trasformazioni di coordinate basate sui principi di Lambert vengono eseguite silenziosamente nei sistemi GPS, nelle app di navigazione, nei GIS aziendali, supportando infrastrutture critiche dalla navigazione aerea al catasto, dalla pianificazione urbana alla risposta alle emergenze.
L'evoluzione continua della cartografia matematica, dall'eleganza classica delle formule di Lambert alle sofisticate implementazioni computazionali moderne, alle emergenti applicazioni di intelligenza artificiale, testimonia la vitalità di una disciplina che rimane al confine tra matematica pura, scienze applicate, e ingegneria computazionale. Il futuro promette ulteriori sviluppi,

ma le fondamenta poste da Lambert nel 1772 rimangono solide, un tributo permanente alla potenza del pensiero matematico rigoroso applicato ai problemi del mondo reale.

Appendice A: Formule complete per implementazione software

Per completezza implementativa, si riportano le formule complete ottimizzate per efficienza e stabilità numerica.

Proiezione Conica Conforme di Lambert - Trasformazione Diretta Completa:
Parametri globali:

```
a = 6378137,0                // semiasse maggiore WGS84 [m]
f = 1/298,257223563          // schiacciamento reciproco
e² = 2f - f²                 // eccentricità al quadrato
e = √(e²)                    // eccentricità
```

Parametri della proiezione:

```
φ₁, φ₂                       // paralleli standard [radianti]
λ₀                           // meridiano centrale [radianti]
φ₀                           // latitudine di origine [radianti]
x₀, y₀                       // false easting/northing [m]
```

Pre-calcolo (una volta per proiezione):

```
// Latitudini isometriche dei paralleli standard
q₁ = atanh(sin(φ₁)) - e·atanh(e·sin(φ₁))
q₂ = atanh(sin(φ₂)) - e·atanh(e·sin(φ₂))

// Raggi di curvatura
N₁ = a / √(1 - e²·sin²(φ₁))
N₂ = a / √(1 - e²·sin²(φ₂))

// Fattori m
m₁ = cos(φ₁) / √(1 - e²·sin²(φ₁))
m₂ = cos(φ₂) / √(1 - e²·sin²(φ₂))

// Costante del cono
if (|φ₁ - φ₂| < ε_singolarità) {
    n = sin(φ₁)  // caso parallelo singolo
} else {
```

```
    n = (ln(m₁) - ln(m₂)) / (q₂ - q₁)
}

// Costante F
F = m₁ / (n · exp(n·q₁))

// Raggio di origine
q₀ = atanh(sin(φ₀)) - e·atanh(e·sin(φ₀))
ρ₀ = a · F · exp(-n·q₀)
```

Trasformazione di un punto (φ, λ):

```
// Latitudine isometrica del punto
sin_φ = sin(φ)
q = atanh(sin_φ) - e·atanh(e·sin_φ)

// Raggio
ρ = a · F · exp(-n·q)

// Angolo
θ = n · (λ - λ₀)

// Coordinate cartesiane
x = x₀ + ρ · sin(θ)
y = y₀ + ρ₀ - ρ · cos(θ)
```

Calcolo Stabile di atanh:

```
funzione atanh(x):
    if (|x| ≥ 1) {
        errore: argomento fuori dominio
    }
    if (|x| < ε_piccolo) {
        // Espansione per piccoli x: atanh(x) ≈ x + x³/3 + x⁵/5 + ...
        return x · (1 + x²/3)
    }
    return 0,5 · ln((1 + x)/(1 - x))
```

Proiezione conica conforme di Lambert - trasformazione inversa completa:
Input: coordinate cartesiane (x, y)

```
// Rimuovi false origin
x' = x - x₀
```

```
    y' = ρ₀ - (y - y₀)

    // Calcola raggio e angolo
    ρ = segno(n) · √(x'² + y'²)
    θ = atan2(x', y')  // atan2 gestisce correttamente i quadranti

    // Test per polo
    if (ρ < ε_polo) {
       φ = segno(n) · π/2
       λ = λ₀
       return (φ, λ)
    }

    // Longitudine
    λ = λ₀ + θ/n

    // Normalizza λ a [-π, π]
    while (λ > π)  λ -= 2π
    while (λ < -π) λ += 2π
// Latitudine isometrica target
    q_target = -ln(ρ / (a·F)) / n

    // Valore iniziale dall'approssimazione sferica
    φ = π/2 - 2·atan(exp(-q_target))

    // Iterazione di Newton-Raphson
    per iter = 1 a max_iter {
       sin_φ = sin(φ)
       cos_φ = cos(φ)

       // Latitudine isometrica corrente
       q = atanh(sin_φ) - e·atanh(e·sin_φ)

       // Derivata dq/dφ
       denom = 1 - e²·sin_φ²
       dq_dφ = denom / (cos_φ · √(1 - e²))

       // Correzione Newton
       Δφ = (q - q_target) / dq_dφ
       φ -= Δφ

       // Test convergenza
```

```
    if (|Δφ| < tol_φ && |q - q_target| < tol_q) {
        break
    }
}

if (iter == max_iter) {
    warning: convergenza non raggiunta
}

return (φ, λ)
```

Parametri numerici raccomandati:
ε_singolarità = 10^{-8} radianti // per test paralleli standard coincidenti
ε_polo = 10^{-6} metri // soglia distanza dal polo
ε_piccolo = 10^{-10} // per serie di Taylor di atanh
max_iter = 10 // iterazioni Newton massime
tol_φ = 10^{-12} radianti // tolleranza latitudine
tol_q = 10^{-15} // tolleranza latitudine isometrica

Queste implementazioni garantiscono precisione submillimetrica su tutto il dominio di definizione della proiezione, con robustezza anche in presenza di input vicini a singolarità o casi limite.